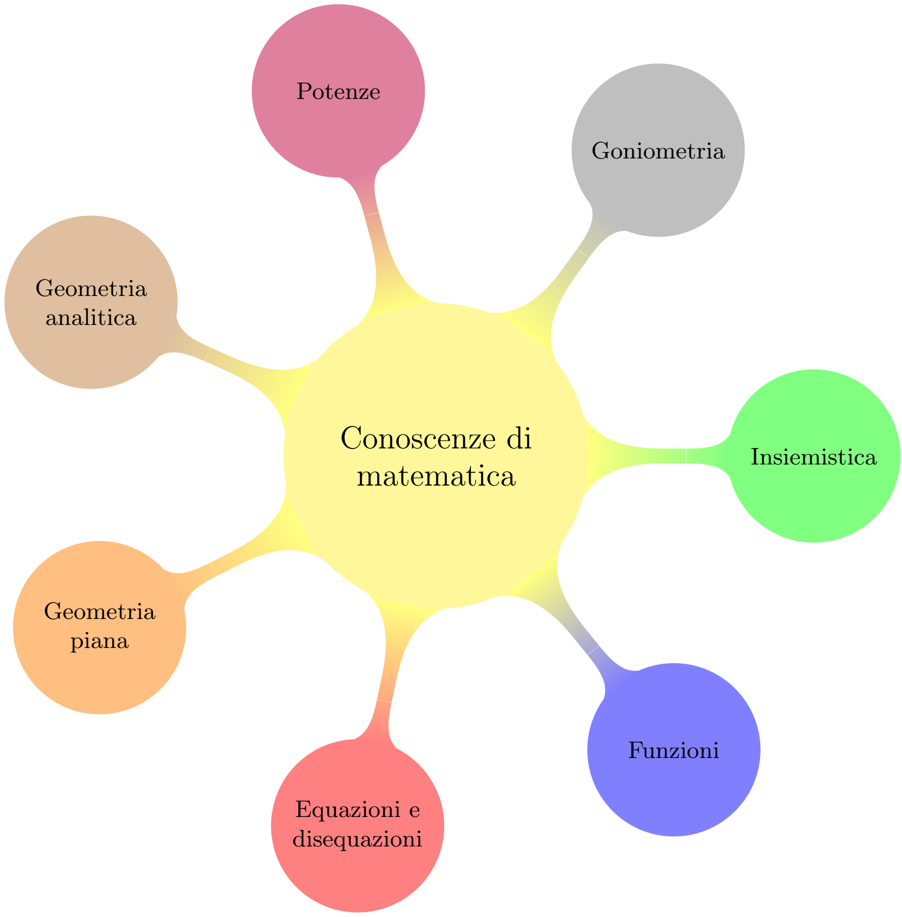
DISPENSE PER IL CORSO DI CONOSCENZE DI MATEMATICA



Autore: Mauro Dianin

Introduzione

Queste dispense sono state pensate per gli studenti della Facoltà di Psicologia che hanno maturato un Obbligo Formativo Aggiuntivo (O.F.A.). Al loro interno si possono trovare tutti i contenuti essenziali che devono essere conosciuti al fine di poter superare l'obbligo formativo. Non sono state riportate, tranne in alcuni casi, le dimostrazioni delle asserzioni proposte: questo per non appesantire un corso che non ha la pretesa di essere esaustivo degli argomenti proposti.

Alla fine di ogni capitolo si trovano una batteria di test che consiglio caldamente di fare con la dovuta attenzione. Gli esercizi si devono infatti considerare come facsimili di quelli che verranno proposti durante l'esame (anche di ammissione).

L'ultimo capito contiene una serie di test riepilogativi che devono essere affrontati dopo aver studiato l'intera dispensa. Questi serviranno in preparazione alla prova di verifica.

Vorrei ringraziare il prof. Zanzotto per l'attenta e accurata lettura delle dispense e per gli ottimi consigli datimi.

Vi auguro buon lavoro!

Capitolo 1

Insiemistica

1.1 Nozioni di insiemistica

La teoria degli insiemi è quel ramo della matematica che si occupa di insiemi e delle loro relazioni. Ma che cosa è un insieme? Non ci è possibile in questa sede entrare nel dettaglio[1], per cui ci accontenteremo di dire che un **insieme** è una collezione di oggetti per i quali esiste un criterio *oggettivo* che permette di decidere in maniera *univoca* se un oggetto appartiene o meno a quella collezione.

Ad esempio sono insiemi:

- i pianeti del sistema solare;
- i libri di una biblioteca;
- i numeri naturali minori di 10;
- gli studenti di una determinata classe.

Faccio notare che in ciascuno degli insiemi riportati esiste un *criterio oggettivo* che serve a determinare l'appartenenza di un elemento a quel determinato insieme. Ad esempio, 7 appartiene all'insieme dei numeri naturali minori di 10, mentre 15 non vi appartiene.

Ci domandiamo ora se la seguente proposizione definisca o meno un insieme:

- gli esami più semplici di un corso di laurea.

In questo caso non siamo in presenza di un insieme in quanto *non* esiste un criterio oggettivo che serva a stabilire se un esame è semplice o meno (potrebbe essere semplice per uno studente e difficile per un altro studente). Non costituiscono un insieme nemmeno:

- gli studenti diligenti di una classe (non è possibile stabilire in modo inequivocabile chi sia diligente e chi non lo sia);
- le opere più belle di un museo (cosa significa bello?);
- i film più paurosi degli ultimi dieci anni (cosa significa pauroso? un film potrebbe essere 'pauroso' per una persona ma non per un'altra).

Gli oggetti che formano un insieme vengono chiamati **elementi** dell'insieme. Ad esempio 7 è un elemento dell'insieme dei numeri naturali minori di 10. Un insieme può essere **finito**, se contiene un numero finito di elementi, o **infinito**, nel caso contrario[2].

[1] In matematica esistono dei *concetti* o *enti primitivi* di cui non è possibile dare una definizione. Per la teoria degli insiemi l'ente primitivo fondamentale è l'insieme, così come per la geometria euclidea gli enti primitivi sono i punti, i piani e le rette. Dire, come faremo noi, che un insieme è una collezione o un raggruppamento di oggetti, non serve a dare una definizione di insieme in quanto bisognerebbe prima definire cosa si intende per collezione e raggruppamento. Per chi ne volesse sapere di più, consiglio il bel libro (ma estremamente difficile) 'Dagli insiemi ai numeri' di Gabriele Lolli.

[2] Faccio notare che dire che un insieme è finito se contiene un numero finito di elementi non è, di fatto, una definizione. Esiste una definizione corretta di insieme finito che tuttavia esula dai contenuti del presente corso.

1.2 Rappresentazione e diagrammi di Eulero-Venn

Gli insiemi possono essere rappresentati in tre distinti modi:

1. rappresentazione per **elencazione** (o estensiva);
2. rappresentazione mediante **proprietà caratteristica** (o intensiva);
3. rappresentazione mediante **diagramma di Eulero-Venn**.

La rappresentazione più semplice, ma meno comoda, è la rappresentazione per *elencazione*: gli elementi vengono elencati e racchiusi da parentesi graffe, separati da virgole. Nessun elemento deve essere ripetuto e non ha importanza l'ordine con cui vengono scritti gli elementi[3].

Ad esempio, l'insieme dei pianeti del sistema solare è

$$P = \{\text{Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno}\}.$$

Altri esempi possono essere

- la rappresentazione per elencazione delle lettere della parola matematica è
$$I = \{\text{m, a, t, e, i, c}\}$$
- la rappresentazione per elencazione dei numeri naturali minori di 10 è
$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Se l'insieme è costituito da infiniti elementi, dopo aver elencato un numero di elementi sufficienti ad individuarlo, si utilizzano dei puntini di sospensione. Ad esempio, possiamo rappresentare l'insieme dei numeri pari nel seguente modo:

$$I = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Chiaramente non è questa la forma di rappresentazione da preferirsi. Per gli insiemi infiniti, ma non solo, di solito si usa la rappresentazione mediante *proprietà caratteristica*. L'insieme è definito dichiarando la proprietà (che, per quanto visto, deve essere oggettiva ed univoca) che caratterizza gli elementi dell'insieme. Matematicamente questo viene rappresentato nel seguente modo:

$$I = \{x/x \text{ soddisfa alla proprietà } p\}$$

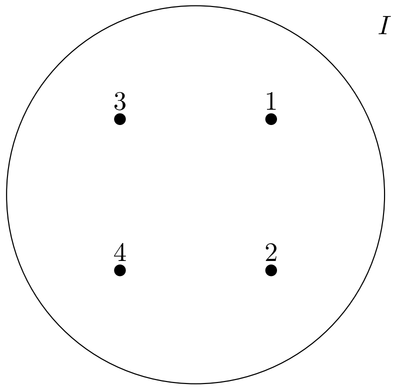
e si legge 'I è l'insieme formato dagli x tali che x soddisfa alla proprietà p'. Vediamo alcuni esempi:

- l'insieme dei numeri pari è
$$I = \{x/x \in \mathbb{N},\ \text{x è multiplo di due}\}$$
e si legge 'I è l'insieme degli x tali che x appartiene ai numeri naturali e x è multiplo di due'. Notiamo che il simbolo $\in$ si legge appartiene e il simbolo $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali (si vedano comunque i paragrafi 1.3 e 1.5);
- l'insieme dei numeri naturali minori di 10 è
$$I = \{x/x \in \mathbb{N},\ x < 10\}$$
e si legge 'I è l'insieme degli x tali che x appartiene ai numeri naturali e x è minore stretto di 10'.

Il terzo e ultimo tipo di rappresentazione di un insieme è dato dai *diagrammi di Eulero-Venn*[4] ed è una rappresentazione per via grafica, che risulta molto utile in diverse situazioni. Un insieme è rappresentato da una linea chiusa non intrecciata al cui interno vengono riportati gli elementi appartenenti all'insieme. Le rappresentazioni grafiche degli insiemi sono sempre, quindi, per elencazione.

[3] Non sempre è possibile infatti ordinare gli elementi di un insieme. Poiché non è necessario che gli elementi di un insieme siano omogenei tra di loro (ovvero dello steso tipo), risulta quanto mai difficile ordinare un insieme composto, per esempio, da fiori e numeri.

[4] Leonhard Euler (1707-1783) è stato il più grande matematico del 1700. Dedicò la sua vita agli studi matematici e fisici occupandosi in particolar modo di algebra, geometria, analisi infinitesimale, teoria dei numeri, meccanica razionale, meccanica celeste, ottica e acustica. John Venn (1834-1923) fu un grande logico matematico.



Nell'esempio proposto, l'insieme I è formato dagli elementi 1, 2, 3, 4. Vedremo meglio nel paragrafo 1.4 l'utilizzo dei diagrammi di Eulero-Venn per la rappresentazione delle operazioni con gli insiemi.

1.3 Appartenenza e inclusione

Due concetti molto importanti all'interno della teoria degli insiemi sono il concetto di **appartenenza** e il concetto di **inclusione**.

Per indicare che un elemento *appartiene* ad un insieme si usa il simbolo $\in$ (che si legge 'appartiene'). Per indicare che un elemento non appartiene ad un insieme si usa il simbolo $\notin$ (che si legge 'non appartiene'). Possiamo pertanto scrivere $x \in I$ che si legge 'x appartiene a I' e $x \notin I$ che si legge 'x non appartiene a I'. Ad esempio $5 \in \mathbb{N}$ in quanto 5 appartiene all'insieme dei numeri naturali, mentre $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$ in quanto $\sqrt{3}$ non appartiene all'insieme dei numeri naturali.

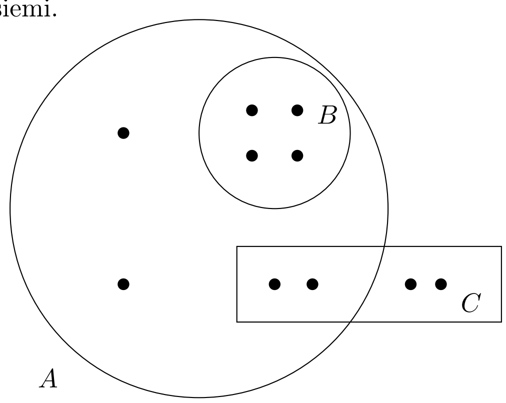
Diverso il concetto di *inclusione*. Consideriamo i due insiemi

$$A = \{\mathrm{a},\ \mathrm{e},\ \mathrm{i},\ \mathrm{o},\ \mathrm{u}\}\ \text{e l'insieme}\ B = \{\mathrm{a},\ \mathrm{e},\ \mathrm{i}\}\,.$$

Si nota facilmente che tutti gli elementi di B sono anche elementi di A. Diciamo allora che B è un *sottoinsieme* di A oppure che B è *incluso* in A, in simboli si scrive $B \subseteq A$. Per sottolineare il fatto che A contiene altri elementi oltre a B, diciamo che B è un *sottoinsieme proprio* di A o che B è *incluso in senso stretto* in A e scriveremo $B \subset A$. Il simbolo $\not\subset$ indica invece la non inclusione. Pertanto un insieme B è un sottoinsieme proprio di A o B è incluso in senso stretto in A se ogni elemento di B appartiene ad A e vi è almeno un elemento di A che non appartiene a B.

Oltre all'insieme stesso, ogni insieme ha almeno un altro sottoinsieme, ed è l'**insieme vuoto**, con simbolo $\emptyset$. L'insieme vuoto è quell'insieme che non possiede elementi. Esiste un unico insieme vuoto (ovvero l'insieme dei numeri dispari divisibili per due e l'insieme dei quadrati aventi un angolo minore di novanta gradi rappresentano lo stesso insieme, l'insieme vuoto). Per qualunque insieme A si ha $\emptyset \subseteq A$.

I diagrammi di Eulero-Venn risultano particolarmente utili quando dobbiamo rappresentare l'inclusione di insiemi.



Nell'esempio proposto, l'insieme B è un sottoinsieme di A mentre l'insieme C non è un sottoinsieme di A.

Prima di concludere il paragrafo sottolineo che l'appartenenza riguarda un elemento ed un insieme (un elemento appartiene ad un insieme) mentre l'inclusione riguarda due insiemi (un insieme è incluso o meno in un altro).

1.4 Operazioni con gli insiemi

In questo paragrafo affronteremo alcune delle principali operazioni che si possono compiere sugli insiemi. Le più comuni di queste operazioni sono l'**unione**, l'**intersezione** e la **differenza** di insiemi.

L'*unione* tra due insiemi A e B si indica con $A \cup B$ e si legge 'A unito B'. Essa rappresenta un insieme che ha per elementi sia gli elementi di A che di B senza però contare due volte gli elementi comuni.

L'*intersezione* di due insiemi A e B si indica con $A \cap B$ e si legge 'A intersecato B'. Esso rappresenta un insieme che ha per elementi (se ve ne sono) i soli elementi comuni ai due insiemi A e B.

La *differenza* tra due insiemi si indica con $A \setminus B$ e si legge 'differenza tra A e B' oppure 'A meno B'. Essa rappresenta un insieme che ha per elementi gli elementi di A che non appartengono a B.

Alcuni esempi chiariranno i concetti appena esposti. Siano A le lettere della parola 'apocalisse' e B le lettere della parola 'aiuola'. Risulta pertanto $A = \{\text{a, p, o, c, l, i, s, e}\}$ e $B = \{\text{a, i, u, o, l}\}$.

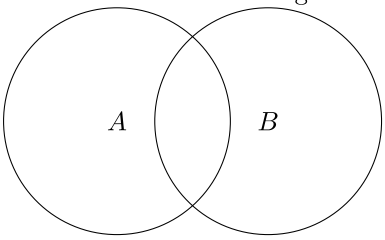
$A \cup B = \{\text{a, p, o, c, l, i, s, e, u, }\}$ in quanto a tutti gli elementi di A dobbiamo aggiungere, senza ripetizione, gli elementi di B.

$A \cap B = \{\text{a, o, l, i, }\}$ in quanto dobbiamo prendere solo gli elementi comuni ai due insiemi.

$A \setminus B = \{\text{p, c, s, e}\}$ poiché dobbiamo prendere gli elementi di A che però non siano elementi di B.

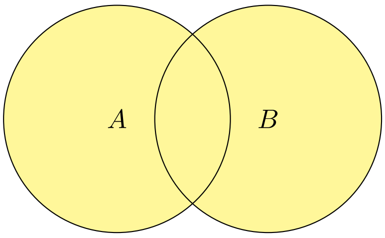
Faccio notare che mentre $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$, non così si ha per $A \setminus B$ in quanto, in generale, $A \setminus B \neq B \setminus A$.

É comodo utilizzare i diagrammi di Eulero-Venn per rappresentare le operazioni con gli insiemi.



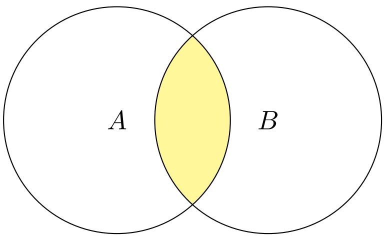
Per rappresentare l'unione $A \cup B$, dobbiamo evidenziare tutti e due gli insiemi.

$A \cup B$



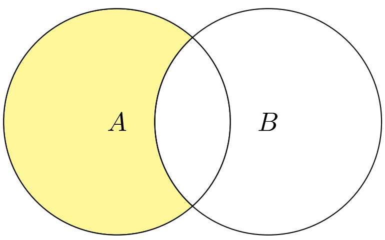
Per rappresentare l'intersezione $A \cap B$, dobbiamo evidenziare solo la parte comune.

$A \cap B$



Per rappresentare la differenza $A \setminus B$, dobbiamo evidenziare la parte di A che non sta in B.

$A \setminus B$



Facciamo un ulteriore esempio. Sia $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{5,\ 6,\ 7\}$. Allora in questo caso:

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A \cap B = \{5\}$, $A \setminus B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B \setminus A = \{6,\ 7\}$

É interessante notare che $A \cap B$ è un insieme formato da un unico elemento. Non si deve confondere pertanto l'elemento 5 dall'insieme formato dal solo elemento 5 cioè $\{5\}$[5] (nel secondo caso sono presenti le parentesi, che identificano sempre un insieme).

Concludiamo con la seguente osservazione: sia $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{6,\ 7\}$. In questo caso A e B non hanno elementi comuni. Pertanto $A \cap B = \emptyset$. L'insieme vuoto deve essere considerato a tutti gli effetti un insieme, l'insieme che non contiene elementi. In particolar modo, quando due insiemi hanno intersezione nulla

[5] Pur non insistendo su questo punto, si osservi il seguente esempio: $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. L'insieme A contiene tre elementi, ciascuno dei quali è un insieme. Pertanto dovremmo scrivere $\{1\} \in A$ e non $\{1\} \subset A$ in quanto l'elemento è l'insieme formato dal solo numero 1.

si dicono *disgiunti*. Chiaramente $\emptyset \subseteq A$, qualunque sia A, pertanto, come abbiamo già avuto modo di osservare, l'insieme vuoto è un sottoinsieme improprio di qualunque insieme.

1.5 Insiemi numerici

Particolare interesse hanno, in ambito matematico, gli insiemi **numerici**. L'uomo, fin dagli albori, ha avuto infatti la necessità di 'contare oggetti' e misurare[6] e, a seconda del contesto, ha dovuto utilizzare insiemi numerici diversi.

L'insieme numerico più semplice è l'insieme dei *numeri naturali*: $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}$ ovvero dei numeri interi dotati di segno positivo.

Non si deve ritenere che il passaggio ai numeri con segno, l'insieme dei *numeri interi*, indicati con il simbolo $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$, sia stato un passaggio indolore. Ancora a metà del 1500 non si accettavano come soluzioni di equazioni i numeri negativi che continuavano ad essere chiamati dai matematici nei più svariati modi (*numeri ficti*, *numeri absurdi*). Tuttavia la matematica svolgeva un ruolo molto importante negli scambi economici e nelle trattazioni finanziarie dove si rendeva necessario distinguere tra crediti e debiti. Non era insolito pertanto ottenere dei problemi in cui una soluzione fosse negativa e questa veniva trattata come un 'debito contratto'. Non a caso i numeri negativi vennero chiamati *debitum*[7].

Minori problemi avevano creato i *numeri razionali* $\mathbb{Q}$ ottenuti come rapporto tra due numeri interi. Essi infatti erano noti (almeno quelli con segno positivo) fin dall'antichità. Essi possono essere rappresentati nella seguente forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x/x = \frac{m}{n},\ \text{con } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}.$$

Esiste tuttavia un ulteriore insieme matematico molto importante, l'insieme dei *numeri reali* $\mathbb{R}$. Esso contiene oltre a tutti i numeri naturali, interi e razionali, anche tutti i numeri che si possono ottenere, ad esempio, per estrazione di radice ($\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{6}$) e tutti i numeri del tipo π, e e molti altri ancora[8]. Osserviamo infine che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

[6] Si ricordi, ad esempio, che la geometria è nata probabilmente in Egitto: essa doveva rispondere al bisogno, pratico, di misurare le terre dopo le periodiche inondazioni del Nilo (la cosiddetta agrimensura).

[7] Per chi volesse saperne di più, consiglio il bel libro 'Storia della matematica' di Carl B. Boyer.

[8] I primi vengono chiamati irrazionali algebrici, i secondi irrazionali trascendenti. Faccio notare che l'introduzione dei numeri irrazionali non è stato un mero esercizio matematico: già nell'antica Grecia ci si era accorti dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ ottenuto dall'applicazione del teorema di Pitagora ad un quadrato di lato 1 (ne è infatti la lunghezza della diagonale).

1.6 Test

1. Il concetto di insieme:
   a) è un concetto primitivo.
   b) può essere definito tramite concetti più semplici.
   c) ha senso se l'insieme ha qualche elemento.
   d) nessuna delle risposte precedenti.
2. Quale dei seguenti non è un insieme ben definito?
   a) L'insieme degli studenti presenti in un'aula durante lo svolgimento di un determinato compito d'esame.
   b) L'insieme dei numeri naturali.
   c) L'insieme delle domande difficili di questo test.
   d) L'insieme delle risposte corrette di questo test.
3. Il simbolo $\subset$ esprime una relazione tra
   a) due insiemi.
   b) un elemento ed un insieme.
   c) due elementi di un insieme.
   d) nessuna delle precedenti risposte.
4. Quale dei seguenti non è un insieme ben definito?
   a) L'insieme degli studenti dell'Università di Padova.
   b) L'insieme dei numeri razionali.
   c) L'insieme dei numeri grandi.
   d) L'insieme delle risposte corrette di questo test.
5. Il simbolo $\in$ esprime una relazione tra
   a) due insiemi.
   b) un elemento ed un insieme.
   c) due elementi di un insieme.
   d) nessuna delle precedenti risposte.
6. La scrittura $a \in A$ significa che
   a) l'elemento a è incluso nell'insieme A.
   b) l'elemento a appartiene all'insieme A.
   c) l'elemento a è più piccolo di A.
   d) l'insieme a contiene l'elemento A.
7. L'intersezione tra due insiemi A e B:
   a) non può mai essere vuota.
   b) contiene alcuni elementi di A e alcuni elementi di B.
   c) è l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e ad B.
   d) contiene tutti gli elementi di A e tutti gli elementi di B.
8. L'unione tra due insiemi A e B:
   a) non può mai essere vuota.
   b) è l'insieme formato da tutti gli elementi di A e da tutti gli elementi di B.
   c) contiene alcuni elementi di A e alcuni elementi di B.
   d) è l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e ad B.

9. Dati due insiemi A ed E, con $A \subseteq E$, la scrittura $E \setminus A$:

   a) non ha senso.
   b) è l'insieme formato dagli elementi che stanno in E ma non in A.
   c) è l'insieme formato dagli elementi che stanno in A ma non in E.
   d) equivale ad $A \setminus E$.

Soluzioni: 1-A, 2-C, 3-A, 4-C, 5-B, 6-B, 7-C, 8-B, 9-B.

Esercizi sulle operazioni tra insiemi.

1. Dati gli insiemi $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{1,\ 3,\ 7\}$ e $C = \{0,\ 1,\ 2,\ 8\}$, calcola
   - $(A \cap B) \cup B$
   - $A \cap B \cap C$
   - $(B \cap C) \cup A$
   - $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Dati gli insiemi $A = \{0,\ 1,\ a\}$, $B = \{1,\ 2,\ a,\ b\}$ e $C = \{0,\ 2,\ 4\}$, calcola
   - $A \cap B \cap C$
   - $A \cup (B \cap C)$
   - $(A \cup B) \cap (A \cap C)$
   - $A \cup B \cup C$
   - $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
3. Dati gli insiemi $A = \{x/x \in \mathbb{Z},\ -3 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{N},\ 0 \leq x \leq 4\}$ calcola
   - $A \setminus B$
   - $B \setminus A$
4. Dati gli insiemi $A = \{x/x \in \mathbb{N},\ x < 50\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{N},\ 20 \leq x \leq 60\}$ e $C = \{x/x \in \mathbb{N},\ 40 \leq x \leq 80\}$ determina
   - $A \setminus (B \setminus C)$
   - $(A \setminus B) \setminus C$

Capitolo 2

Elementi di geometria analitica

2.1 I punti nel piano cartesiano

Lo studio della geometria analitica parte con l'introduzione del concetto di **piano cartesiano**. Il piano cartesiano è costituito da due rette orientate e tra di loro ortogonali (cioè perpendicolari). Possiamo scegliere la prima retta orizzontale e la seconda verticale. Tali rette vengono dette **assi** del sistema di riferimento. Il loro punto di intersezione O viene chiamato **origine** del sistema. In questo modo abbiamo fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali. L'asse orizzontale viene detto **asse delle ascisse** o **asse** x, l'asse verticale viene detto **asse delle ordinate** o **asse** y. Si veda la Figura 2.1.

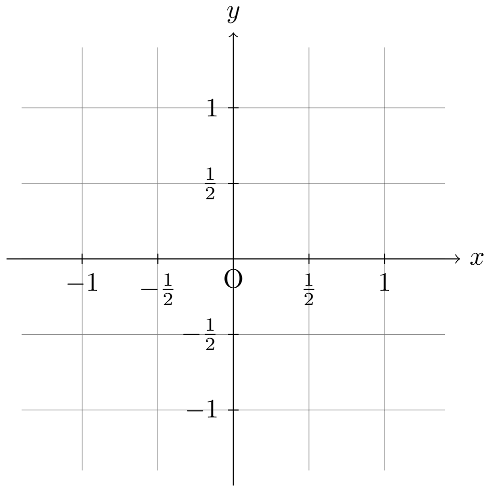


Figura 2.1

Fissata dunque una unità di misura su entrambi gli assi possiamo rappresentare un punto del piano mediante una *coppia ordinata* di numeri reali (si veda la Figura 2.2 dove abbiamo rappresentato il punto $P(\frac{1}{2};1)$).

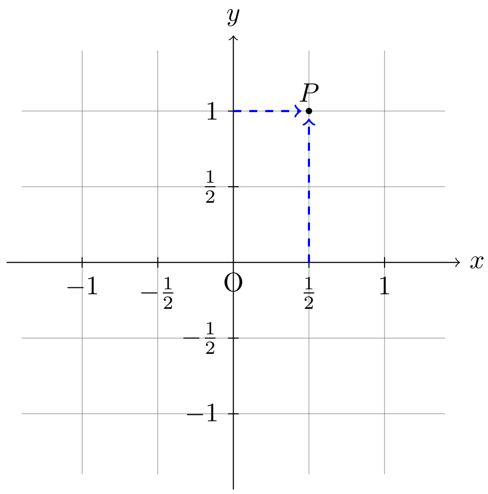


Figura 2.2

I numeri della coppia vengono detti **coordinate** del punto; la prima coordinata viene chiamata **ascissa** e la seconda coordinata viene chiamata **ordinata**.

Viceversa, se in un piano fissiamo un punto, possiamo associargli una coppia di numeri, come presentato nella Figura 2.3. Quindi, ad ogni coppia di numeri corrisponde un punto nel piano, viceversa, ad ogni punto nel piano corrisponde una coppia di numeri. La corrispondenza coppie di numeri-punti è pertanto biunivoca.

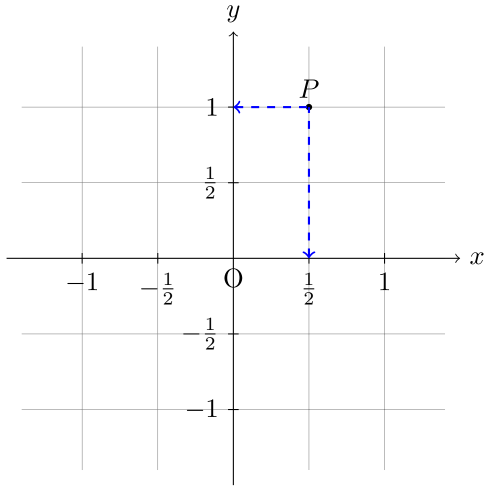


Figura 2.3

In generale, per associare al punto P la corrispondente coppia di numeri $(x; y)$ useremo la scrittura $P(x; y)$ che si legge 'il punto P di coordinate x e y'.

Gli assi cartesiani dividono il piano in quattro parti chiamate **quadranti**. I quadranti sono ordinati in senso antiorario a partire dal quadrante in alto a destra. In Figura 2.4 vengono presentati i segni delle coordinate nei quattro quadranti.

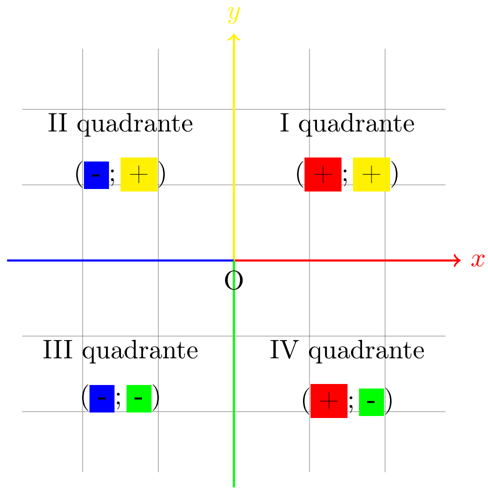


Figura 2.4

Terminiamo il paragrafo calcolando la distanza tra due punti.

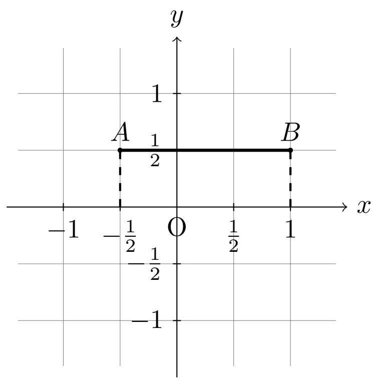


Figura 2.5

Consideriamo anzitutto due punti che abbiano la stessa ordinata (si veda la Figura 2.5). I due punti A e B appartengono quindi ad una retta parallela all'asse x. La loro distanza sarà pertanto la differenza delle ascisse. Otteniamo pertanto, nel nostro caso:
$\overline{AB} = \left|1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|1 + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$.
In generale la distanza tra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ordinata $(y_A = y_B)$ è:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| \,. \tag{2.1}$$

La presenza del valore assoluto è dovuta al fatto che le distanze sono grandezze geometriche e pertanto devono risultare sempre positive. In questo modo ci svincoliamo dalla necessità di sapere quale punto si trova, nella retta orientata, prima dell'altro.

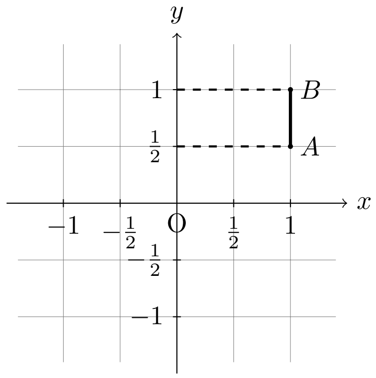


Figura 2.6

Consideriamo poi due punti che abbiano la stessa ascissa (si veda la Figura 2.6). I due punti A e B appartengono quindi ad una retta parallela all'asse y. La loro distanza sarà pertanto la differenza delle ordinate. Otteniamo pertanto, nel nostro caso:
$\overline{AB} = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
In generale la distanza tra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ascissa ($x_A = x_B$) è:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A|\,. \tag{2.2}$$

La presenza del valore assoluto, anche in questo caso, è dovuta al fatto che le distanze sono grandezze geometriche e pertanto devono risultare sempre positive. In questo modo ci svincoliamo, ancora una volta, dalla necessità di sapere quale punto si trova, nella retta orientata, prima dell'altro.

Siamo pronti a questo punto a studiare il caso generale, ovvero siamo in grado di determinare la distanza di due punti che non abbiano necessariamente la stessa ascissa o la stessa ordinata.

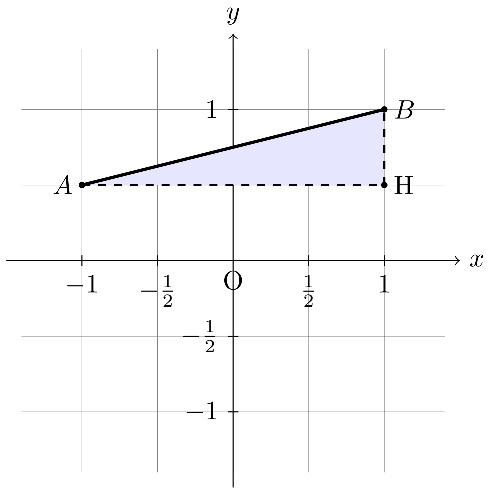


Figura 2.7

Consideriamo i due punti di coordinate $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$. Per calcolare la distanza applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABH:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2}.$$

Ora, $\overline{AH} = |x_H - x_A|$ e $\overline{BH} = |y_B - y_H|$. Osservando la figura però evinciamo che $x_H = x_B$ e che $y_A = y_H$, pertanto otteniamo

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{2.3}$$

dove abbiamo omesso il valore assoluto in quanto i termini sono elevati al quadrato.

Nel nostro caso abbiamo: $\overline{AB} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{17}{4}}$.

2.2 Equazione della retta

Come abbiamo avuto già modo di osservare, la retta è un ente primitivo della geometria. Faremo vedere in questo paragrafo che ad ogni retta del piano cartesiano corrisponde una equazione di primo grado in x, y e viceversa, che ad ogni equazione di primo grado in x, y si può associare una retta.

Partiamo ovviamente dalle rette più semplici, che sono quelle parallele agli assi cartesiani. Si consideri la Figura 2.8. In essa sono rappresentate due rette, una (in rosso) parallela all'asse x e l'altra (in blu) parallela all'asse y.

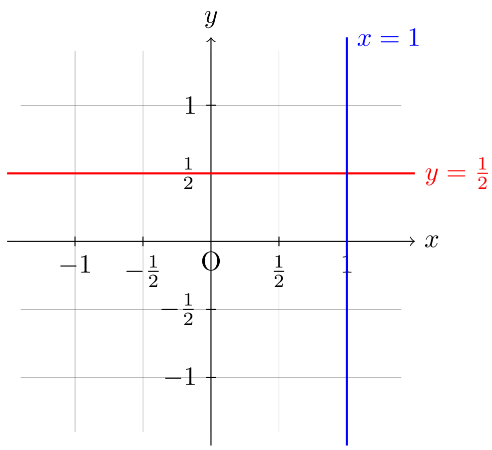


Figura 2.8

Come si noterà, tutti i punti della prima retta, quella parallela all'asse delle x, hanno la medesima ordinata, mentre tutti i punti della seconda retta, quella parallela all'asse delle y, hanno la medesima ascissa.
La prima retta pertanto è caratterizzata dal fatto di avere tutti i punti con ugual ordinata, pari a $y = \frac{1}{2}$. Pertanto l'equazione che descrive la prima retta è $y = \frac{1}{2}$. Analogamente, la seconda retta è caratterizzata dall'avere tutti i punti con ugual ascissa, pari a $x = 1$. L'equazione che descrive la seconda retta è dunque $x = 1$.

Possiamo generalizzare quanto appena visto:

1. la generica equazione di una retta parallela all'asse x è

$$y = k \text{ con } k \in \mathbb{R}; \tag{2.4}$$

2. la generica equazione di una retta parallela all'asse y è

$$x = k \text{ con } k \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

In particolar modo, è interessante sapere quali sono le equazioni degli assi cartesiani. L'asse x deve avere equazione $y = k$ per un valore opportuno di k. Poiché l'asse passa per il punto $(0; 0)$, ovvero l'origine, il valore di k cercato dovrà essere $k = 0$. Pertanto otteniamo $y = 0$. Analogamente, l'equazione dell'asse delle y sarà $x = 0$.

Consideriamo ora una retta passante per l'origine degli assi cartesiani (si veda la Figura 2.9).

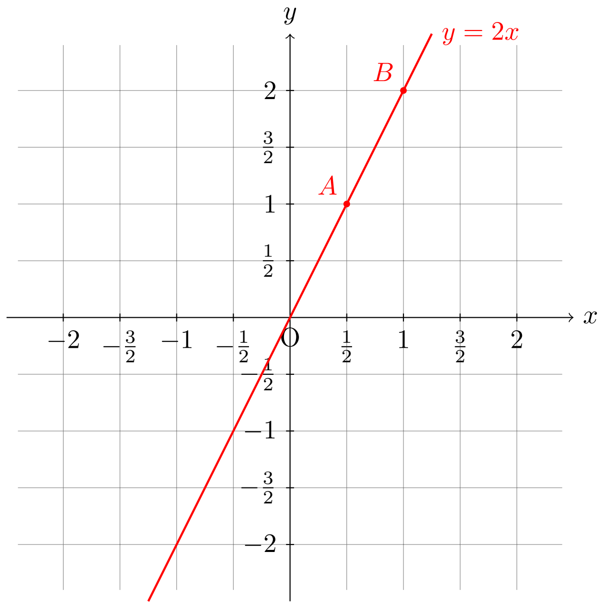


Figura 2.9

Come si nota dalla figura, i punti A e B hanno l'ordinata doppia dell'ascissa, quindi la relazione che lega le coordinate (x, y) di ciascun punto è $y = 2x$. Si può dimostrare che ogni altra coppia di numeri che soddisfi l'equazione $y = 2x$ corrisponde ad un punto della retta AB e, viceversa, che ogni punto della retta ha coordinate che soddisfano l'equazione. Pertanto l'equazione della retta è $y = 2x$.
Possiamo generalizzare il ragionamento fatto e affermare che ogni equazione del tipo

$$y = mx \text{ con } m \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

rappresenta una retta passante per l'origine degli assi cartesiani (ad eccezione della retta che rappresenta l'asse delle y).

Il coefficiente m viene detto **coefficiente angolare**. Vediamo con un disegno il significato geometrico del coefficiente angolare. Si consideri la Figura 2.10.

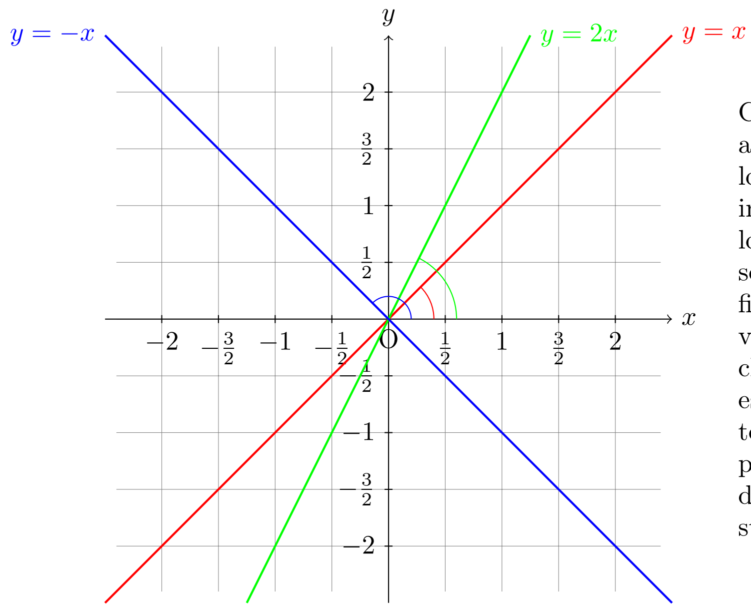


Figura 2.10

Come si nota dalla figura, se il coefficiente angolare è positivo, la retta forma un angolo acuto con il semiasse positivo delle x. Se invece il coefficiente angolare è negativo, allora la retta forma un angolo ottuso con il semiasse positivo delle y. Inoltre, più il coefficiente angolare assume valori maggiori in valore assoluto, tanto più la retta risulta inclinata rispetto all'asse x ovvero l'angolo da essa formato con il semiasse positivo delle x tenderà ad essere sempre più vicino a $90°$. In pratica il coefficiente angolare di una retta dà indicazione dell'inclinazione della retta stessa.

Non ci rimane ora che vedere quale è la forma più generale di equazione di una retta. Consideriamo il disegno di Figura 2.11.

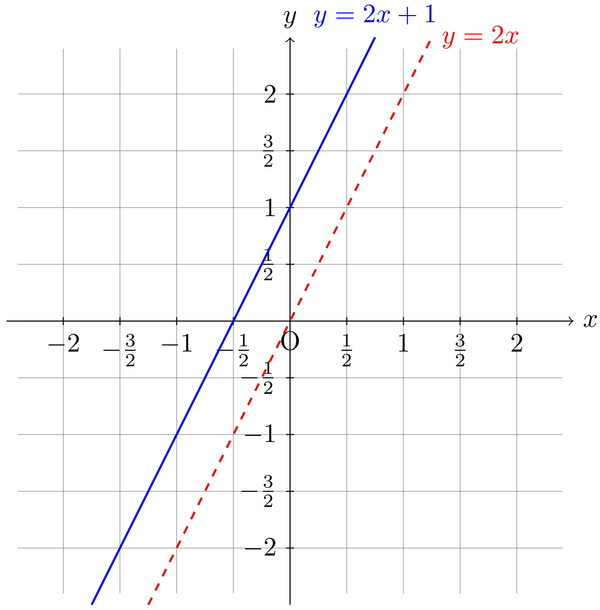


Figura 2.11

Come si nota dalla figura, i punti della retta disegnata in blu sono stati ottenuti traslando la precedente retta verso l'alto di un fattore uno. Pertanto, se la precedente retta aveva equazione $y = 2x$, la nuova retta deve avere equazione $y = 2x + 1$. In effetti si potrebbe dimostrare che l'equazione della generica retta è:

$$y = mx + q \text{ con } m \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Quindi ogni retta del piano, non parallela all'asse y, è rappresentata da un'equazione del tipo $y = mx + q$. Come già detto, m viene chiamato coefficiente angolare e q viene detto **termine noto** o **ordinata all'origine** poiché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle y.

L'equazione $y = mx + q$ viene chiamata equazione in **forma esplicita** in quanto una delle due variabili, la y, è esplicitata in funzione della seconda variabile, la x. Esiste anche una equazione della retta in **forma implicita**, in quanto nessuna delle due variabili è direttamente esplicitata. Si può far vedere che un'equazione che rappresenti tutte le rette del piano cartesiano è un'equazione lineare del tipo

$$ax + by + c = 0, \text{ con } a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \text{ e } b \text{ non entrambi nulli.} \tag{2.8}$$

É possibile passare da una forma all'altra. Infatti, data la retta in forma esplicita $y = mx + q$ si passa facilmente alla forma implicita

$$y = mx + q \to -mx + y - q = 0$$

dove basta prendere $a = -m$, $b = 1$ e $c = -q$.

Viceversa, data la retta in forma implicita $ax + by + c = 0$ abbiamo

$$ax + by + c = 0 \to by = -ax - c \to y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

dove basta prendere $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$ (bisogna però imporre $b \neq 0$).

2.3 Ulteriori considerazioni sulla retta

Consideriamo la retta di equazione $y = mx + q$ e supponiamo che $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ siano due suoi punti. Se A e B appartengono alla retta data, le loro coordinate devono soddisfare l'equazione della retta. Pertanto avremo

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo $y_2 - y_1 = mx_2 + q - mx_1 - q \to y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ da cui

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.9}$$

che rappresenta dunque la formula per calcolare il coefficiente angolare di una retta noti due suoi punti. Il coefficiente angolare è dunque il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualunque distinti della retta. Faccio notare che la formula (2.9) spiega perché il coefficiente angolare venga chiamato anche pendenza: quando misuriamo la pendenza di una strada calcoliamo il rapporto tra quanto la strada sale (in verticale) e quanto spazio percorriamo (in orizzontale). Così la pendenza di una retta misura quanto la retta sale rispetto ad uno spostamento orizzontale (il coefficiente angolare è infatti il rapporto tra una differenza di ordinate e una differenza di ascisse).

Terminiamo il paragrafo con una ulteriore osservazione. Come possiamo ricavare l'equazione di una retta conoscendo due suoi punti? Possiamo operare in questo modo: supponiamo di sapere che la retta passi per i punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$.

Poiché la retta passa per il punto A, la (2.7) diventa $y_1 = mx_1 + q$ da cui possiamo ricavare q: $q = y_1 - mx_1$. Sostituendo sempre nella (2.7) otteniamo $y = mx + y_1 - mx_1$ e riordinando i membri, otteniamo $y - y_1 = m(x - x_1)$. Sappiamo infine, dalla (2.9) che $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pertanto otteniamo

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

e dividendo per $y_2 - y_1$ otteniamo

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.10}$$

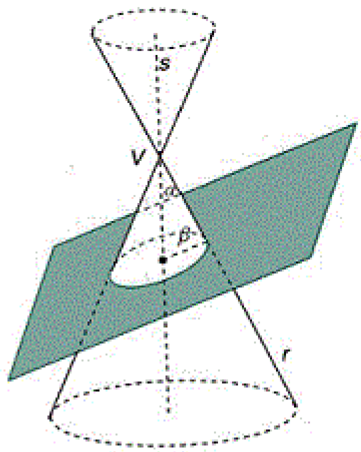
Facciamo alcuni esempi:

1. la retta $3x + 2y - 1 = 0$ corrisponde a $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ quindi il coefficiente angolare vale $-1/3$ e il termine noto vale $1/2$;
2. la retta passante per $(1; 2)$ e $(3; 3)$ ha equazione

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-1}{3-1} \rightarrow y - 2 = \frac{x-1}{2} \rightarrow 2y - 4 = x - 1 \rightarrow 2y = x + 3 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

2.4 Equazione della parabola

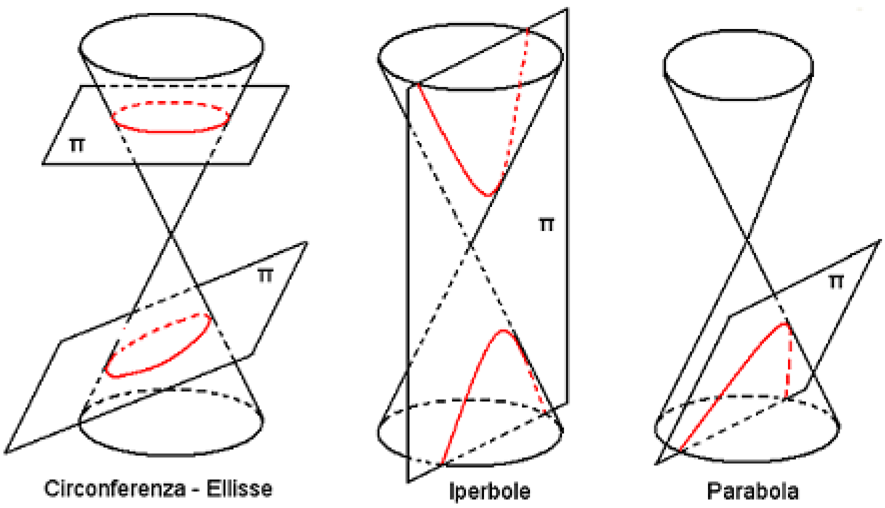
La parabola, e come vedremo nel paragrafo 2.6 la circonferenza, sono due **coniche** del piano cartesiano. Si chiamano *sezioni coniche* di un piano le curve che si ottengono dalla sezione con un piano di un cono circolare retto illimitato a due falde. Una figura aiuterà a capire la definizione.



Si considerino le due rette r e s incidenti nel punto V. Il cono circolare retto a due falde si ottiene dalla rotazione della retta r attorno alla retta s in modo che venga mantenuto costante l'angolo α fra di esse. Il punto V si chiama *vertice* del cono, la retta *s asse*, mentre vengono dette *generatrici* del cono le infinite rette r che si ottengono nella rotazione. Nella figura si vede un cono sezionato da un piano. É chiaro che, a seconda di come il piano seziona il cono, si ottengono curve diverse, che vengono chiamate *coniche*.

1. Se il piano π è perpendicolare all'asse otteniamo delle *circonferenze*;
2. se incliniamo il piano π otteniamo una *ellisse*;
3. se il piano π risulta parallelo ad una delle generatrici, allora otteniamo una *parabola*;
4. se il piano π interseca entrambe le falde allora otteniamo una *iperbole*.

Noi ci occuperemo solo di parabole e circonferenze e partiremo proprio dalla prima delle due.



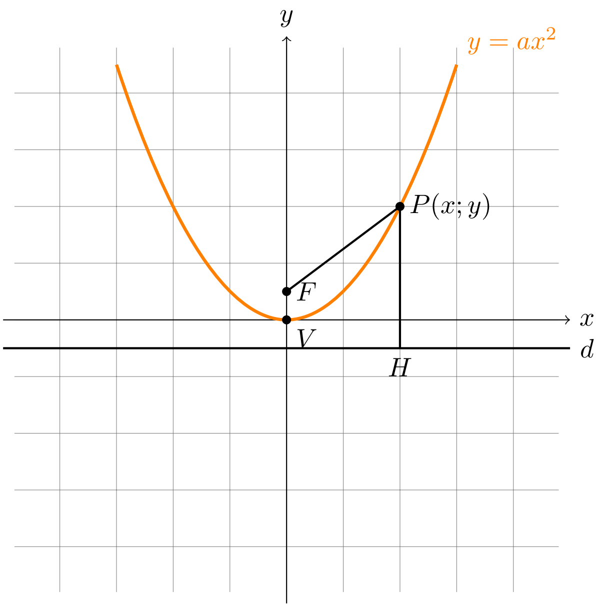


Figura 2.12

La parabola è *il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice*. Si consideri pertanto il fuoco F di coordinate $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ e la direttrice d di equazione $d: \; y = -\frac{1}{4a}$. Applicando la definizione e tenendo conto delle formule 2.2 e 2.3 si ottiene:

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|y + \frac{1}{4a}\right|.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2} = y^2 + \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2}$$

da cui, semplificando, otteniamo $y = ax^2$.

L'equazione $y = ax^2$ rappresenta l'equazione della parabola con vertice nell'origine, ed è, di fatto, un caso particolare (molto semplice) di parabola[1]. Per calcolare l'equazione generica è sufficiente, a questo punto, operare una traslazione (come abbiamo fatto per le rette). Trasliamo quindi la parabola di un fattore x_V, y_V. In questo modo, il vertice avrà coordinate $V\,(x_V; y_V)$, il fuoco avrà coordinate $F\left(x_V; y_V + \frac{1}{4a}\right)$ e la direttrice avrà equazione $d: \; y = y_V - \frac{1}{4a}$. Si veda a tal proposito la Figura 5.13. Applicando nuovamente la definizione e le formule 2.2 e 2.3, otteniamo:

$$\sqrt{(x-x_V)^2 + \left(y - y_V - \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|y - y_V + \frac{1}{4a}\right|$$

$$x^2 - 2xx_V + x_V^2 + y^2 + y_V^2 + \frac{1}{16a^2} - 2yy_V - \frac{y}{2a} + \frac{y_V}{2a} = y^2 + y_V^2 + \frac{1}{16a^2} - 2yy_V + \frac{y}{2a} - \frac{y_V}{2a}.$$

Semplificando e riorganizzando i termini otteniamo:

$$\frac{y}{a} = x^2 - 2xx_V + x_V^2 + \frac{y_V}{a}$$

$$y = ax^2 - 2axx_V + ax_V^2 + y_V.$$

Chiamiamo ora per comodità $b = -2ax_V$ e $c = ax_V^2 + y_V$, da cui

$$y = ax^2 + bx + c \tag{2.11}$$

[1]Infatti l'origine O del sistema di riferimento è, per la scelta fatta dei valori del fuoco e della direttrice, equidistante da entrambi e pertanto appartiene alla parabola. Inoltre ne risulta essere il punto 'più in basso' o 'più in alto' e pertanto viene chiamato vertice.

che rappresenta l'equazione canonica di una parabola.

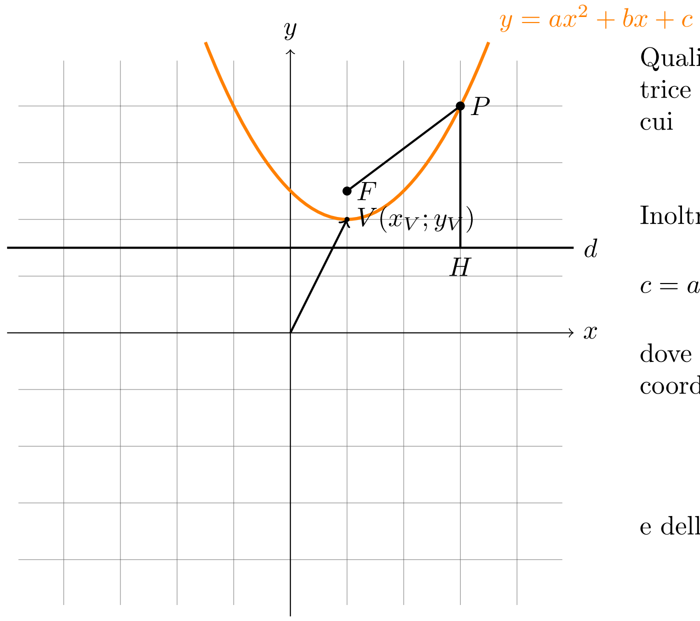


Figura 2.13

Quali sono le coordinate del suo vertice, della direttrice e del fuoco? Osserviamo che $b = -2ax_V$ da cui

$$x_V = -\frac{b}{2a}.$$

Inoltre

$$c = ax_V^2 + y_V \rightarrow y_V = c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$. Da ciò ricaviamo facilmente le coordinate del fuoco F:

$$F\left(x_V; y_V + \frac{1}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

e della direttrice d:

$$d: \ y = y_V - \frac{1}{4a} = \frac{-1-\Delta}{4a}.$$

Un'ultima considerazione: il coefficiente a indica se la parabola ha la *concavità* rivolta verso l'alto o verso il basso. In particolare

1. se $a > 0$ allora la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto (come nella Figura 2.13 e Figura 2.14);
2. se $a < 0$ allora la parabola ha la concavità rivolta verso il basso.

Faccio notare che $a \neq 0$ altrimenti non si avrebbe una parabola (ma una retta).

2.5 Disequazioni di secondo grado

Lo studio della parabola risulta particolarmente utile quando dobbiamo risolvere le disequazioni di secondo grado[2]. Facciamo alcuni esempi. Supponiamo di voler disegnare la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$. Calcoliamo anzitutto le coordinate del vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (2; -1).$$

Notiamo poi che $a = 1$ e quindi la parabola volge la concavità verso l'alto. É comodo conoscere anche le intersezioni della parabola con gli assi cartesiani. Per far questo dobbiamo intersecare la parabola prima con l'asse delle y (che ha equazione $x = 0$) e poi con l'asse delle x (che ha equazione $y = 0$).

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Quindi la parabola interseca l'asse delle y in $(0; 3)$.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \ 3 \\ \searrow \ 1 \end{array}$$

quindi la parabola interseca l'asse x in due punti, $(3; 0)$ e $(1; 0)$.

In questo modo possiamo disegnare la parabola. Supponiamo ora di voler risolvere la disequazione

$$x^2 - 4x + 3 > 0.$$

Per risolvere la disequazione proposta, possiamo pensare di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y > 0 \end{cases}$$

[2]Si veda il capitolo (4) per tutti i dettagli.

In pratica si tratta di vedere quando i punti della parabola hanno ordinata positiva.

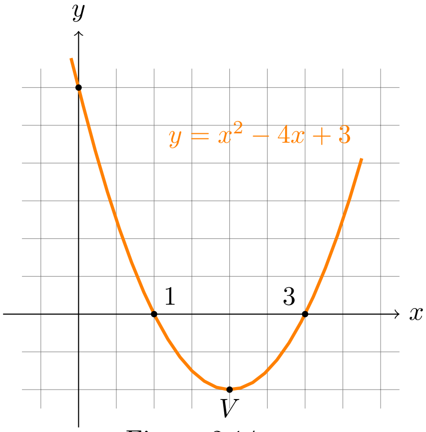


Figura 2.14

Possiamo quindi sfruttare il disegno appena fatto. Guardando il disegno deduciamo che i punti ad ordinata positiva sono quelli che si trovano sopra l'asse delle x (si ricordi la Figura 2.4 di pagina 11).
Pertanto le soluzioni della nostra disequazione sono esterne ovvero

$$x < 1 \vee x > 3.$$

Se invece avessimo voluto risolvere la disequazione $x^2 - 4x + 3 < 0$ allora le soluzioni sarebbero interne ovvero

$$1 < x < 3.$$

É quanto mai importante fare la seguente precisazione: a differenza di quanto accade per le equazioni di secondo grado, la condizione $\Delta < 0$ **non** implica che la disequazione non abbia soluzioni.
Si consideri infatti la seguente disequazione: $x^2 - 2x + 2 > 0$. É facile vedere che $\Delta = -4$ quindi l'equazione associata $x^2 - 2x + 2 = 0$ non ha soluzioni. Questo però non significa che la disequazione sia priva di soluzioni.

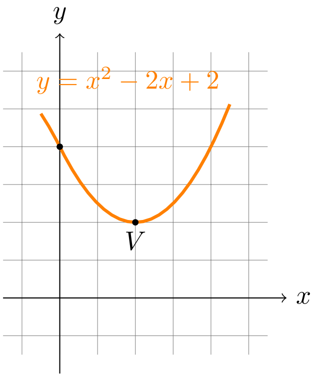


Figura 2.15

Nell'esempio proposto, la parabola non interseca l'asse delle ascisse, tuttavia tutti i suoi punti sono ad ordinata positiva (stanno tutti sopra l'asse delle ascisse) pertanto le soluzioni della disequazione sono tutti i punti dell'asse delle ascisse ($\forall x \in \mathbb{R}$). Se invece avessimo dovuto risolvere la disequazione $x^2 - 2x + 2 < 0$ allora nessun punto dell'asse delle ascisse soddisfa la richiesta e quindi non ci sono soluzioni.

2.6 Equazione della circonferenza

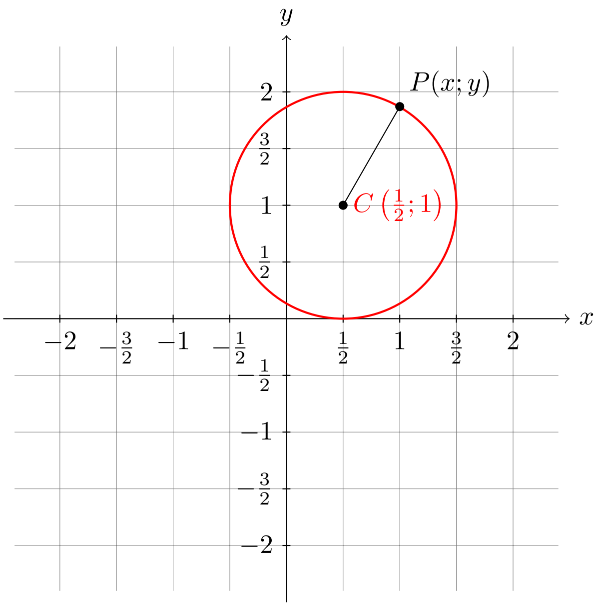


Figura 2.16

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro. Nel nostro caso abbiamo, il centro ha coordinate $C\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, il generico punto ha coordinate $P(x; y)$ ed il raggio ha lunghezza 1. Quindi, ricordando la formula (2.3) si ha

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2} = 1 \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 2y + 1 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - x - 2y + + \frac{1}{4} = 0$$

che risulta essere l'*equazione canonica* della circonferenza data.

Cerchiamo quindi di generalizzare quanto appena fatto e vediamo quale forma assume l'equazione generica di una circonferenza.

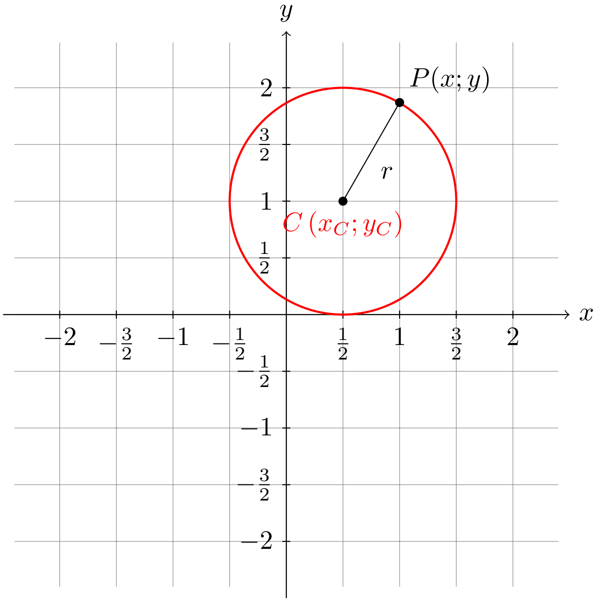


Figura 2.17

Si consideri la figura a lato: la distanza del generico punto P dal centro C della circonferenza deve essere pari a r. Applicando la formula (2.3) si ottiene:

$$\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}=r \rightarrow (x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$$

$$x^2-2xx_C+x_C^2+y^2-2yy_C+y_C^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2xx_C-2yy_C+x_C^2+y_C^2-r^2=0$$

da cui, ponendo $-2x_C=a$, $-2y_C=b$ e $x_C^2+y_C^2-r^2=c$ si ottiene

$$x^2+y^2+ax+by+c=0. \tag{2.12}$$

Quindi, la (2.12) rappresenta l'equazione canonica della circonferenza. Ma quali sono il suo centro ed il suo raggio? Nella dimostrazione abbiamo visto che $-2x_C=a$, $-2y_C=b$ e $x_C^2+y_C^2-r^2=c$ da cui deduciamo che

$$x_C=-\frac{a}{2},\quad y_C=-\frac{b}{2},\quad r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}.$$

Riassumendo, l'equazione canonica della circonferenza è

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \text{ con } C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right) \text{ e } r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}.$$

Faccio notare che la quantità $\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c$ non è sempre necessariamente positiva. Quindi, affinché l'equazione (2.12) rappresenti effettivamente una circonferenza, si deve avere $\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c\geq 0$. In particolare quando $\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c=0$ il raggio è nullo e la circonferenza si riduce ad un punto.

Concludiamo il capitolo con alcuni casi particolari

1. se $a=0$ allora $C\left(0;-\frac{b}{2}\right)$ ovvero il centro della circonferenza appartiene all'asse y;
2. se $b=0$ allora $C\left(-\frac{a}{2};0\right)$ ovvero il centro della circonferenza appartiene all'asse x;
3. se $c=0$ allora l'equazione canonica della circonferenza diventa $x^2+y^2+ax+by=0$ e quindi la circonferenza passa per il centro del sistema di riferimento (l'origine);
4. se $a=b=0$ allora il centro è $C(0;0)$ e quindi il centro della circonferenza coincide con l'origine.

La Figura 2.14 mostra i quattro casi particolari trattati.

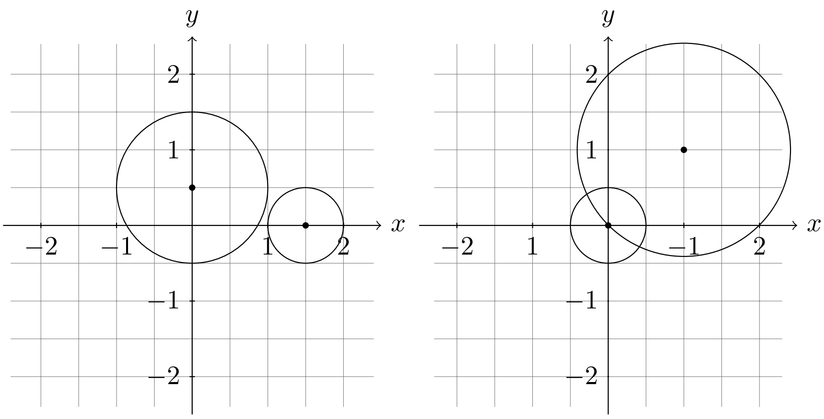


Figura 2.18

2.7 Test

1. Nel piano cartesiano, che cosa corrisponde ad ogni punto?
   a) Una coppia di numeri interi.
   b) Il prodotto di due numeri reali.
   c) Un numero reale.
   d) Una coppia di numeri reali.
2. I punti del secondo quadrante
   a) hanno ascissa positiva e ordinata positiva.
   b) hanno ascissa negativa e ordinata positiva.
   c) hanno ascissa negativa e ordinata negativa.
   d) hanno ascissa positiva e ordinata negativa.
3. I punti del quarto quadrante
   a) hanno ascissa positiva e ordinata positiva.
   b) hanno ascissa negativa e ordinata positiva.
   c) hanno ascissa negativa e ordinata negativa.
   d) hanno ascissa positiva e ordinata negativa.
4. La distanza tra i due punti $A(1;1)$ e $B(2;2)$ vale
   a) $\sqrt{2}$.
   b) 2.
   c) 1.
   d) -2.
5. La bisettrice del secondo e quarto quadrante del piano cartesiano è il luogo geometrico dei punti del piano aventi
   a) ordinata nulla.
   b) ascissa nulla.
   c) ascissa uguale all'ordinata.
   d) nessuna delle precedenti risposte.
6. Nel piano cartesiano, l'equazione canonica (implicita) di una retta è
   a) $ax + by + c = 0$
   b) $y = ax^2 + bx + c$
   c) $y = mx + q$
   d) $x^2 + y^2 + c = 0$
7. Nel piano cartesiano, l'equazione esplicita di una retta è
   a) $ax + by + c = 0$
   b) $y = ax^2 + bx + c$
   c) $y = mx + q$
   d) $x^2 + y^2 + c = 0$
8. L'equazione $x = -1$ che cosa rappresenta nel piano cartesiano?
   a) La bisettrice del secondo e quarto quadrante.
   b) Una retta parallela all'asse delle x.
   c) Una retta parallela all'asse delle y.
   d) Nessuna delle precedenti risposte.

9. Nel piano cartesiano, una retta passa per un punto se e solo se:
   a) le coordinate del punto non soddisfano l'equazione della retta.
   b) le coordinate del punto soddisfano l'equazione della retta.
   c) le coordinate del punto sono uguali ai coefficienti delle variabili dell'equazione.
   d) Nessuna delle precedenti risposte.
10. Quale delle seguenti affermazione è falsa?
   a) Il coefficiente angolare di una retta rappresenta la sua pendenza.
   b) Il coefficiente angolare di una retta è l'angolo che forma con l'asse delle x.
   c) Le rette parallele all'asse delle y non hanno coefficiente angolare.
   d) Le rette parallele all'asse delle x hanno coefficiente angolare nullo.
11. Siano $A(-1;2)$ e $B(3;-1)$; qual è il coefficiente angolare della retta AB?
   a) $-\frac{4}{3}$
   b) $-\frac{3}{4}$
   c) $\frac{4}{3}$
   d) $\frac{3}{4}$
12. La retta passante per i punti $A(1;1)$ e $B(2;3)$ ha equazione
   a) $y+2x+1=0$
   b) $y-2x-1=0$
   c) $y-2x+1=0$
   d) $2y+x+1=0$
13. Quale delle seguenti non è una conica?
   a) Parabola.
   b) Ellisse.
   c) Retta.
   d) Circonferenza.
14. Quale delle seguenti equazioni rappresenta una parabola con il vertice nell'origine?
   a) $y=-5x$
   b) $y=2x^2-x$
   c) $y=x^2-2x+1$
   d) $y=-3x^2$
15. Per conoscere la concavità di una parabola, bisogna analizzare
   a) il primo coefficiente della sua equazione canonica.
   b) il secondo coefficiente della sua equazione canonica.
   c) il terzo coefficiente della sua equazione canonica.
   d) il suo discriminante.
16. L'ascissa del vertice della generica parabola $y=ax^2+bx+c$ vale
   a) $-\frac{b}{2a}$
   b) $-\frac{\Delta}{4a}$
   c) $\frac{1-\Delta}{4a}$
   d) $\frac{-1-\Delta}{4a}$
17. Una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate
   a) interseca sempre l'asse delle ascisse.

b) può intersecare l'asse delle ordinate.
c) interseca sempre l'asse delle ordinate.
d) ha sempre vertice nell'origine.

18. Se in una parabola il coefficiente c vale zero, allora
    a) ha vertice nell'origine.
    b) ha vertice sull'asse delle ascisse.
    c) non si può dire nulla.
    d) passa per l'origine degli assi cartesiani.
19. La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano
    a) equidistanti da un punto fisso detto centro.
    b) equidistanti da un punto fisso e da una retta fissa.
    c) la cui somma delle distanze da due punti fissi è costante.
    d) la cui differenza delle distanze da due punti fissi è costante.
20. La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano
    a) equidistanti da un punto fisso detto centro.
    b) equidistanti da un punto fisso e da una retta fissa.
    c) la cui somma delle distanze da due punti fissi è costante.
    d) la cui differenza delle distanze da due punti fissi è costante.
21. Per studiare una disequazione di secondo grado:
    a) è utile disegnare il grafico della parabola associata all'equazione di secondo grado.
    b) è utile disegnare il grafico della circonferenza associata all'equazione di secondo grado.
    c) è utile disegnare il grafico della retta associata all'equazione di secondo grado.
    d) nessuna delle precedenti.
22. Quali delle seguenti equazioni rappresenta una circonferenza con il centro nell'origine?
    a) $x^2 + y^2 + 6 = 0$
    b) $x^2 + y^2 = 1$
    c) $x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 0$
    d) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
23. Se una circonferenza, di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, passa per l'origine degli assi, quale dei coefficienti della sua equazione è nullo?
    a) Il coefficiente a.
    b) Il coefficiente b.
    c) Il coefficiente c.
    d) Tutti e tre.
24. Quali delle seguenti equazioni rappresenta una circonferenza con il centro nell'origine?
    a) $x^2 + y^2 - 6 = 0$
    b) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
    c) $2x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$
    d) $x^2 + y^2 + 4x = 0$
25. Quali di queste è l'equazione di una circonferenza?
    a) $x^2 + y - 2x + 3 = 0$
    b) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
    c) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

d) $x^2 - y^2 + x + y - 4 = 0$

26. Quali di queste è l'equazione di una parabola.

    a) $x^2 + y^2 + x - y + 3 = 0$
    b) $x^2 - y + 5 = 0$
    c) $x = y + 6$
    d) $x^2 - y^2 = -1$

27. Una retta e una circonferenza si possono intersecare

    a) in al più due punti.
    b) in al più un punto.
    c) non si possono intersecare.
    d) anche in tre punti.

28. Una retta e una parabola si possono intersecare

    a) in al più due punti.
    b) in al più un punto.
    c) non si possono intersecare.
    d) anche in tre punti.

29. Due rette nel piano cartesiano

    a) possono intersecarsi in un punto.
    b) possono essere parallele.
    c) possono coincidere.
    d) tutte le risposte precedenti.

30. Il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ vale

    a) $(2; -1)$
    b) $(-2; -1)$
    c) $(2; 1)$
    d) $(-2; 1)$

Soluzioni: 1-D, 2-B, 3-D, 4-A, 5-D, 6-A, 7-C, 8-C, 9-B, 10-B, 11-B, 12-C, 13-C, 14-D, 15-A, 16-A, 17-C, 18-D, 19-B, 20-A, 21-A, 22-B, 23-C, 24-A, 25-C, 26-B, 27-A, 28-A, 29-D, 30-C.

Capitolo 3

Funzioni

3.1 Relazioni

Introduciamo in questo paragrafo l'importante concetto di relazione. Una **relazione** tra due insiemi A e B è una legge che associa a taluni elementi di A alcuni elementi di B. Indicheremo con $\mathscr{R}$ la relazione tra A e B (o meglio tra alcuni elementi di A e alcuni elementi di B). Se a è in relazione con b scriveremo $a\mathscr{R}b$ oppure $(a;b) \in \mathscr{R}$.

Consideriamo per esempio l'insieme

$$A = \{\text{gli studenti di una classe}\}$$

e l'insieme

$$B = \{\text{l'insieme dei cellulari degli studenti}\}\,.$$

Indichiamo con $\mathscr{R}$ la relazione $a\mathscr{R}b \Leftrightarrow a$ possiede b.

La relazione $\mathscr{R}$ associa a taluni studenti (non tutti gli studenti devono necessariamente avere un cellulare) uno o più cellulari (uno studente potrebbe avere più cellulari). La relazione è allora formata da *coppie ordinate*[1] dove il primo elemento è uno studente ed il secondo elemento è un cellulare.

Data una relazione $\mathscr{R}$ chiamiamo **dominio** l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno almeno una immagine in B. Chiamiamo codominio l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagini di almeno un elemento di A. É sempre vero che $D \subseteq A$ e che $C \subseteq B$. Il dominio è sempre un sottoinsieme dell'insieme di partenza, il codominio C è un sottoinsieme dell'insieme di arrivo.

Possiamo rappresentare quanto accade con un diagramma di Eulero-Venn.

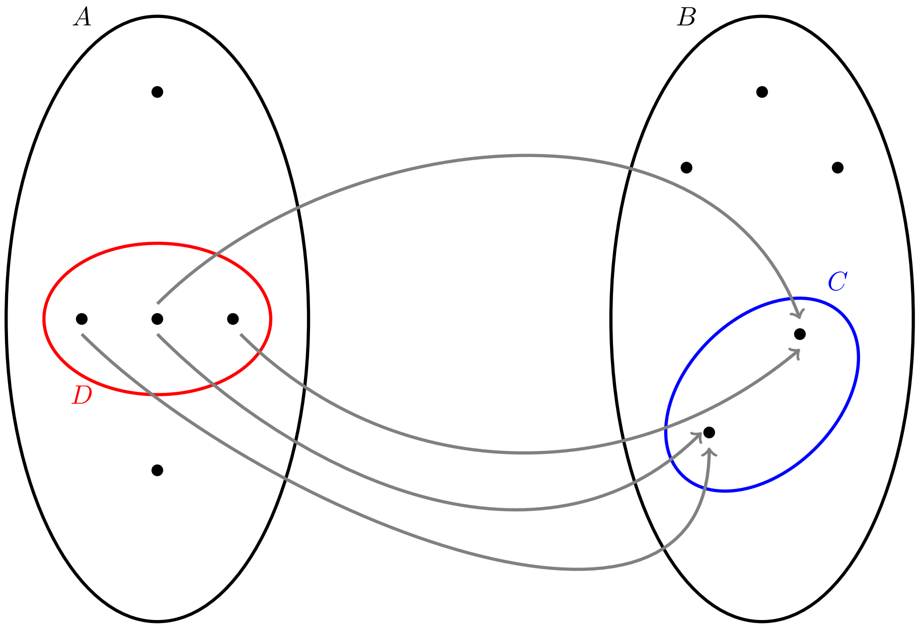


Figura 3.1: relazione tra due insiemi.

[1] Il fatto che una relazione sia un insieme formato da coppie ordinate è, in realtà, molto importante. Non ci addentreremo comunque nello studio di questo fatto.

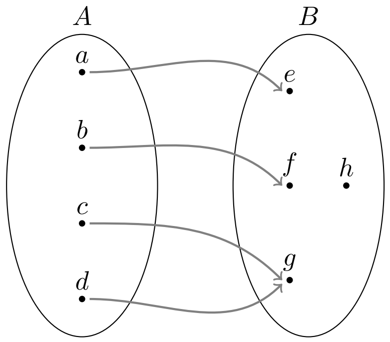
3.2 Le funzioni

Una funzione è una relazione che ad *ogni* elemento di A associa *uno e uno solo* elemento di B. Analizziamo la definizione:

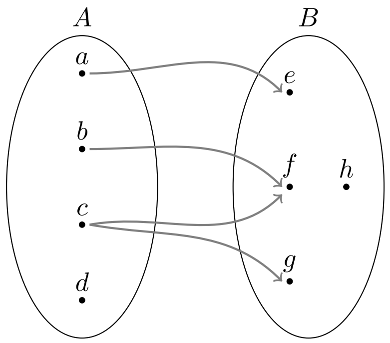
1. una funzione è una relazione, pertanto è definita tra due insiemi A e B;
2. la funzione associa ad ogni elemento di A (quindi a tutti gli elementi di A) un elemento di B;
3. l'elemento di B associato deve essere unico.

Ad esempio, la relazione che ad ogni studente associa il proprio numero di matricola è una funzione, in quanto ogni studente ha una matricola e tale matricola è unica. L'insieme A è l'insieme di tutti gli studenti, l'insieme B è l'insieme di tutte le matricole.

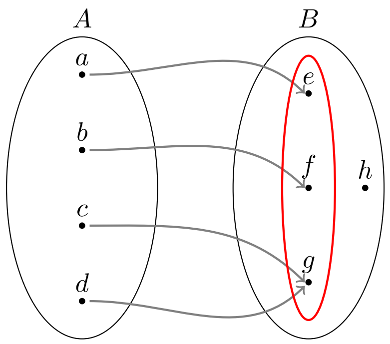
E ancora, la relazione che a ciascun studente di Psicologia associa la lettera iniziale del suo cognome è una funzione; l'insieme A, in questo caso, è l'insieme degli studenti mentre l'insieme B è l'insieme delle lettere dell'alfabeto. Attenzione però, la relazione che ad ogni lettera dell'alfabeto fa corrispondere gli studenti di Psicologia col cognome che inizia per quella lettera, non è una funzione. Infatti, ad alcune lettere corrispondono più studenti, ad altre nessuno.



Possiamo rappresentare graficamente le funzioni mediante diagrammi di Eulero-Venn. Nella figura accanto, la funzione f associa a ciascun elemento dell'insieme $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ uno ed un solo elemento dell'insieme $B = \{e,\ f,\ g\}$ e precisamente $a \to e$, $b \to f$, $c \to g$, $d \to g$. Faccio notare che l'elemento h non è immagine di nessun elemento di A. Graficamente, per individuare una funzione, devono essere rispettate le seguenti condizioni: da ogni elemento di A deve uscire una e una sola freccia e non importa se elementi di B non vengono raggiunti da frecce.



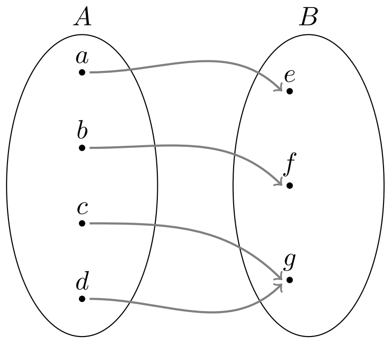
Questo diagramma di Eulero-Venn invece non rappresenta una funzione: vi sono elementi di A a cui non è associato nessun elemento di B (vi sono elementi di A da cui non partono frecce) inoltre un elemento di A viene associato a più elementi di B (da un elemento di A escono più frecce).



L'insieme di partenza A viene chiamato *dominio* della funzione. L'insieme B di arrivo viene chiamato *codominio*. Non è detto che tutti gli elementi del codominio siano immagine di qualche elemento del dominio. Chiameremo l'insieme delle immagini degli elementi di A *insieme immagine* e si indica con $f(A)$. Esso è un sottoinsieme (proprio o improprio) del codominio.

3.3 Le proprietà delle funzioni (iniettive, suriettive, biettive)

Le funzioni possono godere di talune proprietà. In questo paragrafo studieremo le funzioni iniettive, suriettive e biettive.

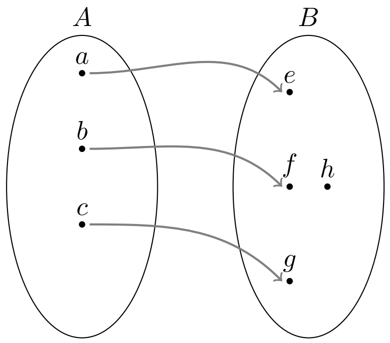


Una funzione si dice **suriettiva** se l'insieme delle immagini coincide con il codominio (quindi ogni elemento dell'insieme B è immagine di almeno un elemento di A). Da un punto di vista grafico, una funzione è suriettiva se tutti gli elementi di B vengono raggiunti da almeno una freccia. In simboli si scrive che f è suriettiva se

$$\forall y \in B,\ \exists x \in A \mid f(x) = y.$$

Il fatto che una funzione sia suriettiva o meno dipende da come viene scelto il codominio. É sempre possibile infatti rendere una funzione suriettiva restringendo il codominio all'insieme delle immagini.

Ad esempio, una funzione che associa agli abitanti di Padova il mese di nascita è una funzione suriettiva mentre non è suriettiva la funzione che associa agli studenti di una classe liceale il giorno di nascita (non ci sono abbastanza studenti per 'coprire' tutti i giorni di un anno).

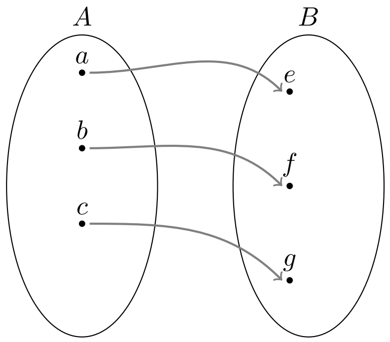


Una funzione si dice **iniettiva** quando un elemento di B è associato al più ad un unico elemento di A. Da un punto di vista grafico questo si traduce nel fatto che gli elementi dell'insieme B vengono raggiunti da una sola freccia e non importa se tutti gli elementi dell'insieme B vengono raggiunti da una freccia. In simboli questo si traduce dicendo che f è iniettiva se

$$\forall x_1,\ x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ad esempio risulta iniettiva la funzione che agli alunni di una classe associa, all'interno dell'insieme dei numeri naturali, il proprio numero d'ordine sul registro. Infatti alunni diversi non possono avere lo stesso numero. Non risulta iniettiva invece la funzione che ad un gruppo di studenti associa la propria madre in quanto vi possono essere studenti che risultano essere fratelli.

Una funzione che risulti al tempo stesso iniettiva e suriettiva si dice **biettiva** (o **biunivoca**).Una funzione biettiva viene anche chiamata *biezione* o *corrispondenza biunivoca* fra A e B. In una funzione biunivoca vi è pertanto una corrispondenza 'uno a uno' tra gli elementi di A e di B: ogni elemento di B è immagine di uno e un solo elemento di A e viceversa.



Graficamente una funzione biettiva si traduce nel fatto che da ogni elemento di A esce una e una sola freccia, tutti gli elementi di B vengono coperti e nessun elemento di B è raggiunto da più frecce. Ad esempio è una biezione la funzione che ad ogni cittadino italiano associa il suo codice fiscale. Oppure è una biezione la funzione che ad ogni cittadino italiano associa la propria residenza.

Avevamo visto in 1.1 a pagina 3 che esistono insiemi infiniti e insiemi finiti. Se prendiamo due insiemi e vogliamo sapere se hanno lo stesso numero di elementi, un sistema che possiamo utilizzare è il seguente: possiamo pensare di costruire una funzione che metta in corrispondenza biunivoca gli elementi del primo insieme con gli elementi del secondo insieme. La corrispondenza biunivoca è una relazione 'uno a uno' pertanto, in questo modo, ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno e un solo elemento del secondo insieme e viceversa. Quindi, in maniera intuitiva, possiamo affermare che il numero degli elementi del primo insieme sia pari al numero degli elementi del secondo insieme.

Perché utilizziamo questo artifizio invece di contare gli elementi dei due insiemi? Perché questa tecnica si applica anche a insiemi infiniti, per i quali diventa difficile (impossibile!) contare gli elementi. In effetti, e qui però ci fermiamo per non complicare troppo il discorso, la definizione corretta di insieme infinito è quella che afferma che un insieme è infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottinsieme proprio. Altrimenti si ha un insieme finito.

3.4 Le funzioni elementari

Se il dominio e il codominio di una funzione sono insiemi numerici, le funzioni vengono dette solitamente funzioni numeriche. Esistono diversi tipi di funzioni numeriche, più o meno complesse. Di quelle che studieremo noi ne daremo sempre una *rappresentazione analitica* cioè avremo sempre la possibilità di esprimere la funzione studiata attraverso una legge contenente operazioni matematiche. In particolar modo utilizzeremo la seguente espressione per rappresentare le funzioni numeriche:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \rightarrow & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

che sta ad indicare che la funzione f (ovvero la legge) associa alla *variabile indipendente* x il valore $f(x)$. $f(x)$ viene anche indicata con y ($y = f(x)$) e y viene chiamata *variabile dipendente*. Per noi si avrà sempre $A = B = \mathbb{R}$.

Ad esempio $y = x^2$ è la funzione che a x, variabile indipendente, associa il suo quadrato, $y = 2x$ è la funzione che a x, variabile indipendente, associa il suo doppio.

La rappresentazione $y = f(x)$ si chiama anche *rappresentazione esplicita* della funzione poiché la variabile dipendente y è esplicitata rispetto alla variabile indipendente x (si veda anche pagina 14). Non sempre una funzione si trova scritta in forma esplicita. Ad esempio $-x + y - 1 = 0$ non è una funzione espressa in forma esplicita. Tuttavia basta spostare il termine in x ed il valore numero per trovare una funzione in forma esplicita:

$$-x + y - 1 = 0 \longrightarrow y = x + 1.$$

Non sempre però è possibile eseguire questa esplicitazione. Si consideri a titolo di esempio il seguente caso: $-x + y^2 - 1 = 0$. Se proviamo ad esplicitare otteniamo

$$-x + y^2 - 1 = 0 \longrightarrow y^2 = x + 1.$$

A questo punto dobbiamo estrarre la radice quadrata e otteniamo

$$y = \pm\sqrt{x + 1}$$

ovvero otteniamo due funzioni $y = \sqrt{x + 1}$ e $y = -\sqrt{x + 1}$ e non una sola funzione. Non è quindi sempre possibile esplicitare una funzione.

Tra tutte le funzioni che si possono trovare alcune devono essere considerate elementari.

1. *Proporzionalità diretta*: una funzione si dice di proporzionalità diretta se può essere scritta nella forma $y = kx$ con $k \neq 0$ costante reale. Osservando la funzione ci accorgiamo che al crescere di x cresce anche y (se k positivo). In pratica il rapporto y/x è costante. Come vedremo a pagina 13 la funzione è rappresentata da una retta passante per l'origine degli assi cartesiani.

2. *Proporzionalità inversa*: una funzione si dice di proporzionalità inversa se può essere scritta nella forma $y = \frac{k}{x}$ con $k \neq 0$ costante reale. Osservando la funzione ci accorgiamo che al crescere di x diminuisce y (se k positivo). In pratica il prodotto $x \cdot y$ è costante.

3. *Funzione lineare*: una funzione si dice lineare se può essere scritta nella forma: $y = ax + b$. Tale funzione, come vedremo a pagina 14, rappresenta una generica retta del piano cartesiano.

3.5 Test

1. In una relazione chiamiamo dominio
   a) l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno almeno una immagine in B.
   b) l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagini di almeno un elemento di B.
   c) la relazione $\mathscr{R}$.
   d) nessuna delle precedenti.
2. In una relazione chiamiamo codominio
   a) l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno almeno una immagine in B.
   b) l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagini di almeno un elemento di B.
   c) la relazione $\mathscr{R}$.
   d) nessuna delle precedenti.
3. Una relazione
   a) è un particolare tipo di legge.
   b) è una funzione.
   c) mette in corrispondenza elementi di tre insiemi diversi.
   d) nessuna delle precedenti.
4. L'espressione $(a; b) \in \mathscr{R}$ equivale a
   a) $a\mathscr{R}b$
   b) $a, b\ \mathscr{R}$
   c) $a \Leftrightarrow b$
   d) nessuna delle precedenti.
5. Una funzione è una relazione che
   a) ad alcuni elementi di A associa alcuni elementi di B.
   b) ad ogni elemento di A associa ogni elemento di B.
   c) ad ogni elemento di A associa uno e uno solo elemento di B.
   d) ad alcuni elementi A associa ogni elemento di B.
6. Una funzione biettiva
   a) può essere suriettiva.
   b) può essere iniettiva.
   c) può essere iniettiva o suriettiva.
   d) deve essere iniettiva e suriettiva.
7. Una funzione suriettiva
   a) non può essere iniettiva.
   b) può essere iniettiva.
   c) non può essere biettiva.
   d) deve essere biettiva.
8. Una funzione iniettiva
   a) non può essere suriettiva.
   b) può essere suriettiva.
   c) non può essere biettiva.
   d) deve essere biettiva.
9. In una rappresentazione grafica di una funzione tramite diagramma di Eulero-Venn

a) da un elemento di A può uscire una freccia.
b) da ogni elemento di A deve uscire un'unica freccia.
c) da ogni elemento di A possono uscire più frecce.
d) nessuna delle precedenti.

10. In una funzione suriettiva

a) il codominio coincide con il dominio.
b) il codominio coincide con l'insieme delle immagini.
c) l'insieme delle immagini coincide con il dominio.
d) nessuna delle precedenti.

11. In una funzione iniettiva

a) un elemento di A è associato al più ad un elemento di B.
b) gli elementi di A e B non sono associati tra loro.
c) un elemento di B è associato al più ad un elemento di A.
d) nessuna delle precedenti.

12. In una relazione di proporzionalità diretta c0n $k > 0$

a) all'aumentare di x aumenta anche y.
b) all'aumentare di x diminuisce y.
c) x e y non sono in relazione tra loro.
d) nessuna delle precedenti.

13. In una relazione di proporzionalità inversa con $k > 0$

a) all'aumentare di x aumenta anche y.
b) all'aumentare di x diminuisce y.
c) x e y non sono in relazione tra loro.
d) nessuna delle precedenti.

14. Una funzione lineare è espressa da

a) $y = ax + b$
b) $y = mx$
c) $y = \frac{m}{x}$
d) $y = x^2$

Soluzioni: 1-A, 2-D, 3-A, 4-A, 5-C, 6-D, 7-B, 8-B, 9-B, 10-B, 11-C, 12-A, 13-B, 14-A.

Capitolo 4

Equazioni e disequazioni

4.1 Equazioni ed equazioni di primo grado

Una **identità** è una uguaglianza tra due espressioni letterali che assumono lo stesso valore per qualsiasi valore numerico attribuito alle lettere che vi compaiono. Ad esempio è una identità la seguente: $(a+1)^2 = a^2+2a+1$. Infatti qualsiasi sia il valore che noi attribuiamo alla lettera a ad ambo i membri dell'uguaglianza, otteniamo sempre lo stesso risultato.

Una **equazione** è una uguaglianza tra due espressioni letterali che sia verificata per alcuni valori attribuiti alle lettere che vi compaiono, scelte come incognite.

Ad esempio è una equazione la seguente uguaglianza

$$3x - 4 = x + 2.$$

Infatti si vede che se sostituiamo alla variabile x, scelta come incognita, il valore 3 otteniamo

$$3 \cdot 3 - 4 = 3 + 2$$

che soddisfa, evidentemente, l'uguaglianza, mentre se sostituiamo a x il valore $x = 2$ otteniamo

$$3 \cdot 2 - 4 \neq 2 + 2.$$

L'espressione a sinistra del segno uguale è detta *primo membro* dell'equazione, quella a destra *secondo membro*. La variabile x rappresenta l'*incognita* dell'equazione.

Una **soluzione o radice** di una equazione è un valore che attribuito all'incognita soddisfa l'uguaglianza, cioè fa assumere lo stesso valore ad entrambi i membri dell'uguaglianza. Risolvere una equazione significa trovare l'insieme delle sue soluzioni.

Se consideriamo le due equazioni $3x - 5 = 2x + 2$ e $2x + 1 = 5x - 20$ ci accorgiamo che hanno la stessa soluzione pari a $x = 7$. In questo caso le due equazioni sono dette *equivalenti*. Due equazioni nelle stesse incognite sono dette equivalenti quando tutte le soluzioni dell'una sono soluzioni dell'altra, e viceversa (ovvero quando l'insieme delle soluzioni dell'una coincide con l'insieme delle soluzioni dell'altra).

Il concetto di equivalenza è particolarmente importante in quanto consente di passare da una equazione ad un'altra, ad essa equivalente, ma strutturalmente più semplice e, quindi, più semplice da risolvere. La trasformazione di una equazione si basa su due principi, chiamati **principi di equivalenza**.

1. **Primo principio di equivalenza**: addizionando o sottraendo ad entrambi i membri di una equazione uno stesso numero, o una stessa espressione letterale calcolabile, si ottiene una equazione equivalente. Dal primo principio derivano due regole molto semplici ma utilissime quando si vogliono trovare le soluzioni di una equazione.

   a) Prima regola: se in una equazione si trasporta un termine da un membro all'altro, cambiandolo di segno, si ottiene una equazione equivalente alla data. Questa proprietà è detta **regola del trasporto**. Infatti, trasportare un termine da un membro all'altro, cambiandolo di segno, equivale ad aggiungere ad entrambi i membri l'opposto di quel termine.

   b) Seconda regola: se un certo termine compare come addendo in ambedue i membri dell'equazione, esso può essere soppresso. Infatti sopprimere il termine comune ai due membri equivale a sottrarre quel termine da entrambi i membri dell'equazione.

2. **Secondo principio di equivalenza**: moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione per *uno stesso numero diverso da zero* o per una stessa espressione calcolabile *diversa da zero* si ottiene una equazione equivalente alla data. Anche in questo caso abbiamo due regole che derivano direttamente dal secondo principio.

a) Prima regola: se tutti i termini di una equazione hanno lo stesso fattore comune non nullo, possiamo dividere i due membri per quel fattore.

b) Seconda regola: cambiando i segni di ambo i membri di una equazione otteniamo una equazione equivalente. Infatti cambiare il segno di un membro equivale a moltiplicare per -1.

Qualche esempio chiarirà quanto detto. Si consideri l'equazione $x - 1 = 3$. Per il primo principio di equivalenza possiamo sommare (o sottrarre) una stessa quantità. Nel nostro caso sommiamo 1 ottenendo

$$x - 1 = 3 \longrightarrow x - 1 + 1 = 3 + 1 \longrightarrow x = 3 + 1.$$

Come si vede dall'ultima espressione, l'aver sommato 1 equivale ad aver spostato -1 dal primo membro al secondo, cambiandolo di segno. In pratica abbiamo applicato la regola del trasporto.

Consideriamo l'equazione $3x - 1 = x - 1$. Applichiamo ancora il primo principio di equivalenza, sommando 1:

$$3x - 1 = x - 1 \longrightarrow 3x - 1 + 1 = x - 1 + 1 \longrightarrow 3x = x.$$

In questo caso l'aver sommato uno corrisponde ad aver eliminato da ambo i membri il fattore comune -1. É una applicazione della seconda regola del primo principio di equivalenza.

Consideriamo l'equazione $5x + 5 = 10$. Possiamo applicare il secondo principio di equivalenza e dividere tutto per 5 ottenendo

$$5x + 5 = 10 \longrightarrow x + 1 = 2.$$

Perché i principi di equivalenza sono così importanti. Perché attraverso una loro ripetuta applicazione possiamo ottenere la forma canonica di un'equazione. E partiremo proprio dall'equazione canonica dell'**equazione di primo grado**.

Una equazione di primo grado può essere scritta nella forma

$$ax + b = 0 \tag{4.1}$$

Per risolvere una equazione di primo grado possiamo operare in questo modo: spostiamo anzitutto tutti i fattori numerici a destra e i fattori letterali a sinistra. Otteniamo

$$ax = -b.$$

A questo punto dobbiamo distinguere tre casi:

1. se $a \neq 0$ possiamo dividere per a ottenendo l'unica soluzione $x = -\frac{b}{a}$;
2. se $a = b = 0$ allora si ha $0 \cdot x = 0$ che ammette infinite soluzioni:
3. se $a = 0$ e $b \neq 0$ allora $0 \cdot x = -b$ che non ammette soluzioni.

Ad esempio, proviamo a risolvere la seguente equazione: $6x - 4 - 10x = 1 - 2x$.

$$6x - 4 - 10x = 1 - 2x \longrightarrow -4x - 4 = 1 - 2x \longrightarrow -4x + 2x = 1 + 4 \longrightarrow -2x = 5$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{5}{-2} \longrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

4.2 Equazioni di secondo grado

Un'equazione della forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.2}$$

si chiama **equazione di secondo grado** in forma *canonica* (o *normale*).

Si può dimostrare che[1] le soluzioni di un'equazione di secondo grado si calcolano in questo modo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac. \tag{4.3}$$

L'espressione sotto radice si chiama *discriminante* e si indica con la lettera greca Δ (delta). Il nome discriminante sta a significare che il suo valore discrimina le soluzioni dell'equazione. Infatti, ricordando che non si può estrarre la radice quadrata di un numero negativo, abbiamo i seguenti tre casi:

1. se $\Delta > 0$ allora l'equazione ammette soluzioni, esse sono due, reali e distinte e vengono calcolate tramite la 4.3;
2. se $\Delta = 0$ l'equazione ha comunque soluzioni tuttavia si ha che esse sono due, reali e coincidenti (nella 4.3 basta porre $\Delta = 0$ e si ha $x = -\frac{b}{2a}$);
3. se $\Delta < 0$ allora l'equazione non ha soluzioni reali (non si può estrarre la radice di un numero negativo).

In definitiva, se il discriminante è maggiore o uguale a zero l'equazione ammette soluzioni (due reali e distinte se il discriminante è strettamente maggiore di zero, due reali e coincidenti se il discriminante è uguale a zero), se il discriminante è minore di zero l'equazione non ammette soluzioni reali.

Finiamo con alcune definizioni:

- un'equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ si dice *completa*;
- un'equazione del tipo $ax^2 + bx = 0$ si dice *spuria*;
- un'equazione del tipo $ax^2 + c = 0$ si dice *pura*;
- un'equazione del tipo $ax^2 = 0$ si dice *monomia*.

Come si vede solo il termine a deve essere diverso da zero (altrimenti non avremo un'equazione di secondo grado) mentre sia b che c possono assumere valore nullo.

4.3 Casi particolari

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che

- un'equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ si dice *completa*;
- un'equazione del tipo $ax^2 + bx = 0$ si dice *spuria*;
- un'equazione del tipo $ax^2 + c = 0$ si dice *pura*;
- un'equazione del tipo $ax^2 = 0$ si dice *monomia*.

Chiaramente le equazioni spurie, pure e monomie non hanno nulla di particolare, sono pur sempre equazioni di secondo grado. Tuttavia, non essendo equazioni complete, vale la pena vedere dei metodi risolutivi più semplici, che non richiedono l'applicazione della formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.

1. Caso delle *equazioni monomie*: se l'equazione è monomia allora essa assume la forma $ax^2 = 0$. Possiamo dividere per a (che ricordo supponiamo diverso da zero) ottenendo $x^2 = 0$. Da qui si ricava che l'unica soluzione è $x = 0$ (che 'conta due volte' ovvero abbiamo due soluzioni coincidenti che assumono entrambe il valore nullo). Ad esempio l'equazione $5x^2 = 0$ ammette le due soluzioni coincidenti $x = 0$.

[1] Per i più curiosi mostro come si ottiene la formula. Si raccoglie anzitutto il coefficiente a ottenendo

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0.$$

A questo punto cerco un quadrato con i primi due membri (possiamo eliminare a in quanto numero diverso da zero):

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

da cui

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Infine

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dove abbiamo posto $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Caso delle *equazioni spurie*: in questo caso l'equazione assume la forma $ax^2+bx=0$. Possiamo raccogliere a fattor comune una x ottenendo $(ax+b)\,x=0$. Per risolvere questa equazione applichiamo la *legge di annullamento del prodotto*: il prodotto di due o più fattori è nullo se almeno uno dei fattori è nullo. Quindi ricaviamo che o $ax+b=0$ o che $x=0$. Nel secondo caso non c'è nulla da discutere e una soluzione è $x=0$, nel primo caso si ottiene

$$ax+b=0 \longrightarrow ax=-b \longrightarrow x=-\frac{b}{a}.$$

Chiaramente se avessimo applicato la formula risolutiva avremmo ottenuto lo stesso risultato[2]. Ad esempio l'equazione $3x^2-x=0$ si risolve raccogliendo la x da cui $x\,(3x-1)=0$ che ha per soluzioni $x=0$ e $x=\frac{1}{3}$.

3. Caso delle *equazioni pure*: in questo caso l'equazione assume la forma $ax^2+c=0$. Per risolvere l'equazione spostiamo il termine noto a destra (ricordandoci di cambiare segno) ottenendo così $ax^2=-c$. Dividendo per a (che ricordiamo deve essere diverso da zero) si ha

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Se $-\frac{c}{a}<0$ allora l'equazione non ammette soluzione, infatti non esiste nessun quadrato di un numero che assuma valore negativo. Se invece $-\frac{c}{a}>0$ allora l'equazione ammette due soluzioni precisamente

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Quindi le due soluzioni sono opposte (ovvero hanno lo stesso valore con segno opposto). Ad esempio $x^2+5=0$ non ha soluzioni infatti $x^2=-5$ e questo è impossibile. Invece $4x^2-16=0$ ammette le due soluzioni $4x^2=16 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow x=\pm 2$.

4.4 Equazioni impossibili, indeterminate, determinate

Ci occuperemo in questo paragrafo del numero delle soluzioni di una equazione.

1. Se una equazione ha un numero *finito* di soluzioni si dice *determinata*. Ad esempio, l'equazione $x-5=2$ è determinata perché ammette una sola soluzione $x=7$.

2. Se una equazione *non ammette* soluzioni si dice *impossibile*. Ad esempio $x^2+3=0$ è impossibile perché come abbiamo visto a pagina 31 ha il discriminante negativo ($\Delta=-12$ e quindi non ammette soluzioni).

3. Se una equazione ammette *infinite* soluzioni allora essa è detta *indeterminata*.

Vi è un importante teorema di algebra che dice che un'equazione di grado n ha al più n soluzioni. Ciò significa che una equazione di primo grado ha al più una soluzione, una equazione di secondo grado ha al più due soluzioni (le soluzioni coincidenti contano comunque due), una equazione di terzo grado ha al più tre soluzioni e così via.

Facciamo però attenzione. Quando parliamo di equazione di grado n ci si riferisce sempre ad una equazione scritta in forma *normale* o *canonica*. Ad esempio, ricordo che la forma normale di una equazione di primo grado è $ax+b=0$ e la forma normale di una equazione di secondo grado è $ax^2+bx+c=0$. Perché facciamo questa precisazione? Si consideri il seguente esempio: $(x-1)^2=x^2-4x-1$. Apparentemente sembra una equazione di secondo grado ma se svolgiamo i calcoli otteniamo:

$$(x-1)^2=x^2-4x-1 \longrightarrow x^2-2x+1=x^2-4x-1 \longrightarrow -2x+1=-4x-1$$
$$\longrightarrow 2x=-2 \longrightarrow x=-1$$

Quindi quella che sembrava una equazione di secondo grado è in realtà una equazione di primo grado (che ammette una sola soluzione). Ecco perché è così importante prima *ridurre a forma normale* l'equazione.

Terminiamo con alcuni esempi:

- $x^2-3x+2=0$ è determinata in quanto ammette due soluzioni, $x=2$ e $x=1$;
- $x^2+5=0$ è impossibile e lo possiamo vedere sia calcolando il delta (discriminante) che vale $\Delta=-20$ oppure osservando che alla quantità x^2 che è certamente positiva (in quanto è un quadrato) sommiamo un'altra quantità positiva e pertanto la loro somma non può essere nulla;
- $\sqrt{x^2}=x$ e indeterminata in quanto ogni valore della x positivo soddisfa l'equazione.

[2]Infatti si ha

$$ax^2+bx=0 \longrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot 0}}{2a} \longrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm b}{2a}= \begin{array}{l} \nearrow\ x_1=0 \\ \searrow\ x_2=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a} \end{array}$$

4.5 Disequazioni di primo grado

Tutte le disequazioni di primo grado si presentano in forma normale nel seguente modo:

$$ax + b > 0 \text{ oppure } ax + b \geq 0 \text{ oppure } ax + b < 0 \text{ oppure } ax + b \leq 0. \tag{4.4}$$

A differenza di una equazione di primo grado, che se scritta nella forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ ammette una sola soluzione, un disequazione di primo grado scritta in forma normale ammette infinite soluzioni che possono essere identificate solitamente con un intervallo o, ed è lo stesso, con un sottoinsieme opportuno della retta reale. Una disequazione è dunque una disuguaglianza fra due espressioni algebriche che è verificata (soddisfatta) per alcuni (anche infiniti) valori attribuiti alle variabili (ma non per tutti).

Per risolvere una disequazione di primo grado si opera sempre nello stesso modo:

1. si riduce l'equazione a forma normale;
2. si porta a destra il termine numerico b;
3. si divide per il coefficiente a (supposto diverso da zero) ricordando che *se divido per un valore positivo non cambio il verso della disuguaglianza, se invece divido per un valore negativo devo cambiare il verso della disuguaglianza.*

Facciamo un esempio: si supponga di voler risolvere la disequazione $5x + 3 < 0$. La disequazione è gia posta in forma normale. Porto a destra della disuguaglianza il 3 ottenendo

$$5x + 3 < 0 \longrightarrow 5x < -3$$

mi ricordo infatti che quando sposto un fattore da un lato o dall'altro del verso di disuguaglianza devo cambiare segno.

A questo punto devo dividere per 5: essendo una quantità positiva non cambio il verso della disuguaglianza ottenendo

$$5x < -3 \longrightarrow x < -\frac{3}{5}.$$

Se invece volessi risolvere la disequazione $-3x - 2 \geq 0$ otterrei

$$-3x - 2 \geq 0 \longrightarrow -3x \geq 2 \longrightarrow x \leq -\frac{2}{3}$$

dove nell'ultimo passaggio ho tenuto conto che dovendo dividere per -3 devo cambiare il verso della disuguaglianza.

4.6 Algebrizzazione di un problema

La matematica è uno strumento molto potente in quanto consente di descrivere le leggi che regolano la natura. É una sorta, se la vogliamo pensare così, di linguaggio (universale) delle leggi che governano la natura.

Sebbene non vogliamo addentrarci in discorsi troppo complessi, è pur vero che il linguaggio matematico viene utilizzato per tradurre in formule problemi espressi in modo verbale. Questo processo viene chiamato *formalizzazione* (*algebrizzazione* o *matematizzazione*) di un problema. Questo procedimento viene fatto in modo tale da tradurre in una equazione, disequazione, sistemi di equazioni etc un problema la cui soluzione è data dalla soluzione dell'equazione, della disequazione, del sistema di equazioni etc.

Ad esempio, si voglia risolvere il seguente problema: l'età di Marco è pari a tredici anni più metà della sua età? Qual è l'età di Marco?

Per risolvere il problema operiamo in questo modo: chiamiamo x l'età di Marco. Allora il problema chiede di risolvere la seguente equazione

$$x = 13 + \frac{x}{2}.$$

A questo punto per sapere l'età di Marco basta risolvere una equazione:

$$x = 13 + \frac{x}{2} \longrightarrow x - \frac{x}{2} = 13 \longrightarrow \frac{2x - x}{2} = 13 \longrightarrow \frac{x}{2} = 13 \longrightarrow x = 26.$$

Un altro esempio potrebbe essere il seguente: l'età di Marco è minore del doppio della sua età diminuita di dieci. Quanti anni può avere al minimo Marco. Anche in questo caso basa formalizzare il problema e risolvere, in questo caso, una disequazione: chiamata x l'età di Marco si ha

$$x < 2x - 10 \longrightarrow x - 2x < -10 \longrightarrow -x < -10 \longrightarrow x > 10.$$

Quindi Marco deve avere almeno dieci anni.

4.7 Risoluzione di disequazioni di secondo grado

4.7.1 Il metodo della parabola o grafico

Le disequazioni di secondo grado, **ridotte a forma canonica**, si presentano sempre in una delle seguenti quattro forme:

$$
\begin{array}{ll}
ax^2 + bx + c > 0 & \qquad ax^2 + bx + c \geq 0 \\
ax^2 + bx + c < 0 & \qquad ax^2 + bx + c \leq 0
\end{array}
$$

con $a \neq 0$. Poiché possiamo sempre moltiplicare per -1, senza perdita di generalità possiamo supporre che sia $a > 0$. Chiameremo $ax^2 + bx + c = 0$ l'equazione associata alla disequazione e $y = ax^2 + bx + c$ la parabola associata alla disequazione. Poiché $a > 0$, la parabola avrà sempre la concavità verso l'alto.

Consideriamo la parabola $y = ax^2 + bx + c$. Essa interseca l'asse x quando $y = 0$. Per sapere dunque se la parabola interseca l'asse x dobbiamo risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Distinguiamo tre casi, a seconda che il delta dell'equazione associata sia maggiore, minore o uguale a zero.

1. Supponiamo che il delta dell'equazione associata sia maggiore di zero ($\Delta > 0$). In questo caso sappiamo che l'equazione associata ha due soluzioni distinte, che chiameremo x_1 e x_2 (supponiamo $x_1 < x_2$). Quindi, se il delta è maggiore di zero, la parabola interseca l'asse x in due punti distinti. Un disegno aiuterà a capire quello che succede.

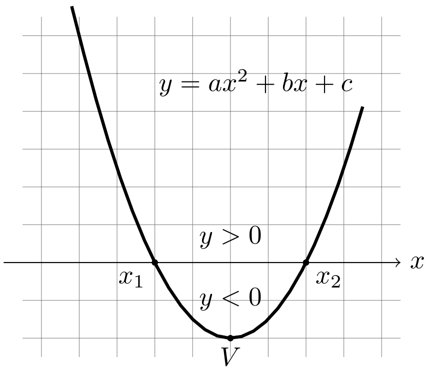


Figura 4.1

Possiamo sfruttare il disegno appena fatto. Guardando la figura deduciamo che i punti ad ordinata positiva sono quelli che si trovano sopra l'asse delle x, quelli ad ordinata negativa sotto l'asse delle x.
Se dobbiamo risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ dobbiamo considerare i punti della parabola ad ordinata positiva, ovvero quelli che si trovano al di sopra dell'asse delle x. I valori di x corrispondenti ai punti della parabola che si trovano al di sopra dell'asse x sono quelli esterni ai valori x_1 e x_2. Pertanto le soluzioni della disequazione sono

$$x < x_1 \vee x > x_2.$$

Se dobbiamo risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ dobbiamo considerare i punti della parabola ad ordinata negativa, ovvero quelli che si trovano al di sotto dell'asse delle x. I valori di x corrispondenti ai punti della parabola che si trovano al di sotto dell'asse x sono quelli interni ai valori x_1 e x_2. Pertanto le soluzioni della disequazione sono

$$x_1 < x < x_2.$$

2. Supponiamo che il delta dell'equazione associata sia uguale a zero ($\Delta = 0$). In questo caso sappiamo che l'equazione associata ha due soluzioni coincidenti, che chiameremo $x = x_1 = x_2$. Quindi, se il delta è uguale a zero, la parabola interseca l'asse x in un unico punto. Un disegno aiuterà a capire quello che succede.

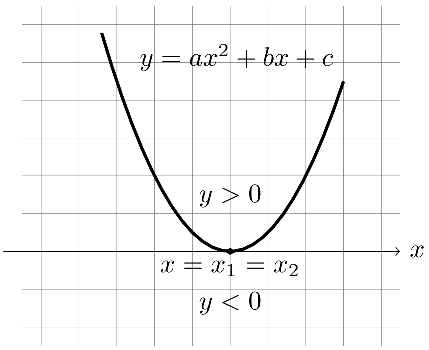


Figura 4.2

Possiamo sfruttare il disegno appena fatto. Guardando la figura deduciamo che i punti ad ordinata positiva sono quelli che si trovano sopra l'asse delle x, quelli ad ordinata negativa sotto l'asse delle x.
Se dobbiamo risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ dobbiamo considerare i punti della parabola ad ordinata positiva, ovvero quelli che si trovano al di sopra dell'asse delle x. I valori di x corrispondenti ai punti della parabola che si trovano al di sopra dell'asse x sono tutti tranne quelli corrispondenti ai valori x_1 e x_2. Pertanto le soluzioni della disequazione sono

$$\forall x,\ x \neq x_1, \text{ o equivalentemente } \ x \neq x_2.$$

Se dobbiamo risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ dobbiamo considerare i punti della parabola ad ordinata negativa, ovvero quelli che si trovano al di sotto dell'asse delle x. Non vi sono valori di x corrispondenti a punti della parabola che si trovano al di sotto dell'asse x. Pertanto la disequazione non ha soluzioni

$$\nexists x, x \in \mathbb{R}.$$

3. Supponiamo che il delta dell'equazione associata sia minore di zero ($\Delta < 0$). In questo caso sappiamo che l'equazione associata non ha soluzioni. Quindi, se il delta è minore di zero, la parabola non interseca l'asse x. Un disegno aiuterà a capire quello che succede.

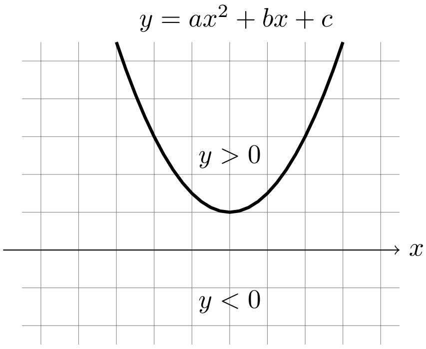


Figura 4.3

Possiamo sfruttare il disegno appena fatto. Guardando la figura deduciamo che i punti ad ordinata positiva sono quelli che si trovano sopra l'asse delle x, quelli ad ordinata negativa sotto l'asse delle x.
Se dobbiamo risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ dobbiamo considerare i punti della parabola ad ordinata positiva, ovvero quelli che si trovano al di sopra dell'asse delle x. I valori di x corrispondenti ai punti della parabola che si trovano al di sopra dell'asse x sono tutti quelli dell'asse. Pertanto le soluzioni della disequazione sono

$$\forall x, x \in \mathbb{R}.$$

Se dobbiamo risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ dobbiamo considerare i punti della parabola ad ordinata negativa, ovvero quelli che si trovano al di sotto dell'asse delle x. Non vi sono valori di x corrispondenti a punti della parabola che si trovano al di sotto dell'asse x. Pertanto la disequazione non ha soluzioni

$$\nexists x, x \in \mathbb{R}.$$

4.7.2 Il metodo algebrico

Osservando lo schema precedente possiamo formulare alcune regole per la risoluzione delle disequazioni di secondo grado scritte in forma canonica. Distinguiamo tre casi, a seconda che il delta dell'equazione di secondo grado associata alla disequazione sia maggiore, minore o uguale a zero. Come al solito supporremo $a > 0$.

- $\Delta > 0$, in questo caso l'equazione associata alla disequazione ha due soluzioni distinte x_1 e x_2:
  - se $a > 0$ e $ax^2 + bx + c > 0$ cioè quando, come si usa dire, *il primo coefficiente ed il verso della disuguaglianza sono* ***concordi***, le soluzioni sono ***esterne*** all'intervallo delle radici, ovvero
  $$x < x_1 \vee x > x_2;$$
  - se $a > 0$ e $ax^2 + bx + c < 0$ cioè quando, come si usa dire, *il primo coefficiente ed il verso della disuguaglianza sono* ***discordi***, le soluzioni sono ***interne*** all'intervallo delle radici, ovvero
  $$x_1 < x < x_2.$$
- $\Delta = 0$, in questo caso l'equazione associata alla disequazione ha due soluzioni coincidenti $x = x_1 = x_2$:
  - se $a > 0$ e $ax^2 + bx + c > 0$ cioè quando *il primo coefficiente ed il verso della disuguaglianza sono concordi*, le soluzioni sono date da *tutti i valori di x eccetto x_1 e x_2*;
  - se $a > 0$ e $ax^2 + bx + c < 0$ cioè quando *il primo coefficiente ed il verso della disuguaglianza sono discordi*, la disequazione è *impossibile*.
- $\Delta < 0$ in questo caso l'equazione associata alla disequazione non ha soluzioni:
  - se $a > 0$ e $ax^2 + bx + c > 0$ cioè quando *il primo coefficiente ed il verso della disuguaglianza sono concordi*, le soluzioni sono date *da tutti i valori di x*;
  - se $a > 0$ e $ax^2 + bx + c < 0$ cioè quando *il primo coefficiente ed il verso della disuguaglianza sono discordi*, la disequazione è *impossibile*.

Se invece il simbolo di disuguaglianza è $\leq$ o $\geq$, tra le soluzioni si devono considerare anche gli eventuali valori di x per cui si annulla il trinomio al primo membro, ossia le eventuali radici dell'equazione associata.

Possiamo riassumere le osservazioni precedenti nella seguente tabella.

disequazioni di secondo grado: schema algebrico riassuntivo			
discriminante	primo coefficiente a e verso del simbolo della disuguaglianza	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c<0$ soluzioni	$ax^2+bx+c\geq 0$ $ax^2+bx+c\leq 0$ soluzioni
$\Delta>0$	concordi	$x<x_1 \vee x>x_2$	$x\leq x_1 \vee x\geq x_2$
	discordi	$x_1<x<x_2$	$x_1\leq x\leq x_2$
$\Delta=0$	concordi	$\forall x,\ x\neq x_1,\ x\neq x_2$	$\forall x$
	discordi	$\nexists x$	$x=x_1=x_2$
$\Delta<0$	concordi	$\forall x$	$\forall x$
	discordi	$\nexists x$	$\nexists x$

4.8 Valore assoluto. Disequazioni con il valore assoluto.

Ricordiamo la definizione di *valore assoluto* (o *modulo*). Il valore assoluto di un numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è l'opposto del numero se il numero è negativo. Matematicamente scriveremo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Alcuni semplici esempi chiariranno il significato di valore assoluto. Ad esempio $|+5|=5$, $|-3|=3$, $|0|=0$.
Elenchiamo di seguito alcune utili proprietà del valore assoluto:

$$|x| = |-x| \ \ \forall x\in\mathbb{R};$$
$$|x\cdot y| = |x|\cdot|y| \ \ \forall x,\ y\in\mathbb{R};$$
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \ \forall x,\ y\in\mathbb{R} \text{ con } y\neq 0;$$
$$|x| = |y| \ \Leftrightarrow x=\pm y \ \forall x,\ y\in\mathbb{R};$$
$$\sqrt{x^2} = |x|\,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Consideriamo ora alcune particolari tipi di disequazioni con i valori assoluti. Vogliamo risolvere le disequazioni del tipo

$$|A\,(x)|>k$$

con k con numero reale negativo. Osserviamo che, per definizione, un valore assoluto è sempre maggiore di zero, per cui la disequazione è sempre verificata. Ad esempio

$$\left|x^2+x\right|>-2$$

ha per soluzione l'insieme dei numeri reali.
Consideriamo ora le disequazioni del tipo

$$|A\,(x)|>k$$

con k con numero reale positivo. Per vedere come risolvere questo tipo di disequazione, consideriamo il seguente esempio:

$$|x|>8.$$

Applichiamo la definizione di valore assoluto: se x è positivo allora posso togliere il valore assoluto senza cambiare di segno, se invece x è negativo devo togliere il valore assoluto cambiando di segno.
Questo equivale a risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x>8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ -x>8 \end{cases}$$

ovvero a

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x>8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ x<-8 \end{cases}$$

che ha per soluzione $x<-8\ \vee x>8$. In generale quindi le soluzioni delle disequazioni del tipo $|A\,(x)|>k$ sono le soluzioni delle due disequazioni $A\,(x)<-k \vee A\,(x)>k$.

Vogliamo ora risolvere le disequazioni del tipo

$$|A(x)| < k$$

con k con numero reale negativo. Osserviamo che, per definizione, un valore assoluto è sempre maggiore di zero, per cui la disequazione non è mai verificata. Ad esempio

$$\left|x^2 + 5x\right| < -3$$

non ha soluzioni nell'insieme dei numeri reali.

Consideriamo ora le disequazioni del tipo

$$|A(x)| < k$$

con k con numero reale positivo. Per vedere come risolvere questo tipo di disequazione, consideriamo il seguente esempio:

$$|x| < 5.$$

Applichiamo la definizione di valore assoluto: se x è positivo allora posso togliere il valore assoluto senza cambiare di segno, se invece x è negativo devo togliere il valore assoluto cambiando di segno.

Questo equivale a risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x < 5 \end{cases}$$

ovvero a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x > -5 \end{cases}$$

che ha per soluzione $-5 < x < 5$. In generale quindi le soluzioni delle disequazioni del tipo $|A(x)| < k$ sono le soluzioni di $-k < A(x) < k$ ovvero al sistema

$$\begin{cases} A(x) < k \\ A(x) > -k \end{cases}$$

4.9 Test

1. Se due equazioni hanno lo stesso insieme di soluzioni, allora
    a) devono essere identiche.
    b) devono avere gli stessi coefficienti.
    c) sono equivalenti.
    d) devono essere determinate.
2. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono reali se e solo se
    a) il discriminante è negativo.
    b) il discriminante è positivo.
    c) il discriminante è non negativo.
    d) il discriminante è non positivo.
3. Quale dei seguenti prodotti notevoli è sbagliato?
    a) $(x+y)(x-y) = x^2 - xy + y^2$
    b) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
    c) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
    d) $(x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = x^3 - y^3$
4. L'equazione $x^2 + 5 = 0$ è
    a) impossibile.
    b) indeterminata.
    c) spuria.
    d) completa.
5. La frase "Il triplo di x è minore di -2" si traduce nella disequazione
    a) $3x < -2$
    b) $3x \leq -2$
    c) $3x \geq -2$
    d) $3x > -2$
6. Quali sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2x - 2 = 0$?
    a) 12
    b) $1 \pm \sqrt{3}$
    c) $1 + \sqrt{3}$
    d) L'equazione non ammette soluzione.
7. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono reali e distinte se e solo se
    a) il discriminante è negativo.
    b) il discriminante è positivo.
    c) il discriminante è non negativo.
    d) nessuna delle precedenti.
8. Quali fra le seguenti è un'identità e non un'equazione?
    a) $(x+2)^2 - 4x = x^2 + 4$
    b) $(x-2)^2 - 4x = x^2 + 4$
    c) $(x-2)^2 - 4x = x^2 - 4$
    d) nessuna delle precedenti risposte.
9. La frase "Il quadruplo di x non è maggiore di -5" si traduce nella disequazione

a) $4x < -5$
b) $4x > -52$
c) $4x \geq -5$
d) $4x \leq -5$

10. Quale delle seguenti non è equivalente alla disequazione $x - \frac{3+x}{3} + 2\left(\frac{1}{6} - x\right) > 1$?

a) $-4x > 5$
b) $x < -\frac{5}{4}$
c) $4x > -5$
d) $4x < -5$
e) nessuna delle precedenti risposte.

11. Quale tra i seguenti numeri non è soluzione della disequazione $\frac{6+5x}{-2} + \frac{4-x}{2} \leq 0$

a) 0
b) $-\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $-\frac{2}{3}$
e) nessuna delle precedenti.

12. Qual è l'insieme delle soluzioni della disequazione $4x(x+1) - (2x-1)^2 \geq 2(4x+5)$

a) $\emptyset$
b) $\mathbb{R}$
c) $x \leq 10$
d) $x \geq 10$
e) nessuna delle precedenti risposte.

13. Quale delle seguenti equazioni non ammette soluzioni?

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$
b) $2x^2 + 9 = 0$
c) $12x - x^2 = 0$
d) $x^2 - 8x + 4 = 0$
e) nessuna delle precedenti risposte.

14. L'equazione $x^2 - 10x + 25 = 0$ ha soluzioni?

a) Si, perché $\Delta > 0$
b) Si, perché $\Delta = 0$
c) No, perché $\Delta < 0$
d) No, perché $\Delta = 0$
e) Nessuna delle precedenti risposte.

Soluzioni: 1-C, 2-C, 3-A, 4-A, 5-A, 6-B, 7-B, 8-A, 9-D, 10-C, 11-D, 12-A, 13-B, 14-B.

Risolvi le seguenti equazioni:

$$3x - 20 = x$$
$$5x + 1 = 3x - 4$$
$$20 + 5x = 10$$
$$2x - 7 = x - 2$$
$$8x + 4 = 9x - 7$$
$$199 + 225x = 270x + 169$$
$$5x + 4 = 13 + 2x$$
$$x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$3x^2 + 5x + 4 = 0$$
$$8x^2 + 25 = (x + 5)^2$$
$$4x^2 - 13x - 12 = 0$$
$$(x - 2)^2 = (x + 5)^2 - 2x$$
$$x^2 - 3x = -3$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$x^2 = (x - 1)^2 + (x + 1)^2$$
$$5x = 5x^2$$
$$x^2 = 0$$

Risolvi le seguenti disequazioni:

$$3x - 1 \geq 7x + 7$$
$$\tfrac{6-2x}{9} > \tfrac{1-x}{6}$$
$$\tfrac{x-1}{2} + \tfrac{x+2}{3} < \tfrac{5x+1}{6}$$
$$\tfrac{3}{5}x + 2 > \tfrac{x}{3} + 1$$
$$\tfrac{(x-2)^2}{6} - \tfrac{x(1-x)}{3} > \tfrac{x(1+x)}{2}$$
$$3x^2 - 12 \geq 0$$
$$2x^2 + 1 \leq 0$$
$$x^2 - 4 > 0$$
$$x^2 - x - 2 > 0$$
$$x^2 + 6x + 5 < 0$$
$$x^2 - 5x - 6 < 0$$
$$x^2 + 2x - 3 \leq 0$$
$$2x^2 + x - 1 > 0$$
$$-x^2 + 2x - 5 > 0$$
$$x^2 + x + 3 > 0$$
$$-x^2 + 8x - 7 \leq 0$$

Risolvi le seguenti disequazioni con il valore assoluto.

$$2 + |x| < 9$$
$$10 < 11 - |x|$$
$$\left|4x^2 - 1\right| + 5 < 0$$
$$3 + |x| > 7$$
$$1 > 12 - |x|$$
$$|x| - 9 > 3$$
$$|x + 3| > 0$$
$$\left|x^2 - 6\right| < 0$$
$$-3\,|x + 1| > 0$$
$$|2x + 5| < 0$$

Capitolo 5

Elementi di geometria piana

5.1 Basilari nozioni di geometria

Oggetto di studio della geometria sono gli **enti geometrici**. Gli enti geometrici sono dunque gli 'oggetti' studiati dalla geometria. Per descrivere gli enti si utilizzano, di solito, delle **definizioni**. Una definizione non è altro che un modo per associare un nome ad un ente e per descriverlo attraverso le sue proprietà. Ad esempio, quando diciamo che un rettangolo è un parallelogramma con i quattro angoli congruenti, associamo un nome ad un ente (il rettangolo) e lo descriviamo attraverso la proprietà di essere un parallelogramma con gli angoli congruenti.

Chiaramente, per coloro che non sapessero il significato di parallelogramma, angolo e congruente, dovrei dare delle ulteriori definizioni che a loro volta farebbero uso di altri enti che andrebbero definiti e così via, generando una catena di definizioni che, teoricamente, non ha fine.

Come avevamo già accennato in 1.1, per interrompere questo procedimento a catena, non si può far altro che supporre che per alcuni enti non serva dare una definizione, perché, per qualche motivo, già nota. Questi enti vengono detti **enti primitivi**. In geometria euclidea[1] si considerano come enti primitivi:

1. il punto;
2. la retta;
3. il piano.

Per quanto detto, non definiremo punti, rette e piani e la loro esistenza sarà accettata a priori così come l'idea che noi abbiamo di punti, piani e rette.

Ci serve però avere qualche caratteristica di questi enti primitivi. In geometria esistono dei **postulati** (o **assiomi**[2]) che in qualche modo servono a caratterizzare gli enti primitivi. Questi postulati devono essere considerati 'primitivi' ovvero li dobbiamo (anche loro) accettare a priori. Ad esempio un postulato della geometria euclidea è: per due punti distinti di un piano passa una e una sola retta. Il postulato afferma che presi due punti distinti del piano possiamo tracciare una retta. In qualche modo il postulato ci aiuta a capire quali siano le 'proprietà' del punto. Esistono evidentemente altri postulati sulle rette: una retta è composta da infiniti punti e, forse il più famoso dei postulati, da un punto esterno ad una retta si può tracciare una e una sola retta parallela alla retta data[3].

---

[1] Chiariremo più avanti il motivo di questo nome.

[2] Euclide (circa 300 a.C.) è stato uno dei più grandi matematici del mondo greco antico. Visse molto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C. ca. - 283 a.C.). Euclide è noto soprattutto come autore degli *Elementi*, la più importante opera di geometria dell'antichità. La geometria che si studia negli istituti superiori non è altro che una versione moderna dei suoi Elementi. Da qui il nome di geometria euclidea. Euclide distingueva tra postulati (che avevano un carattere decisamente geometrico) da assiomi (o nozioni comuni, che avevano validità più generale). Oggi questa distinzione non si fa più.

[3] Tale postulato è noto come quinto postulato degli Elementi o postulato delle parallele. Pur non potendo entrare nel dettaglio della storia di questo postulato, credo sia doveroso fare almeno un piccolo cenno. Abbiamo già detto cosa significa postulato. Faccio qui notare che il quinto postulato di Euclide (che nella versione originale affermava che se da una retta, incontrandone altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette, prolungate all'infinito, si incontrano dalla parte in cui vi sono i due angoli minori di due retti, e si può, chiaramente, dimostrare che i due enunciati sono equivalenti) ha una formulazione meno intuitiva rispetto agli altri postulati (il terzo postulato afferma che con ogni centro e ogni distanza si può descrivere un cerchio, il quarto afferma che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro). In pratica, mentre i primi quattro postulati avevano la caratteristica di essere 'evidenti', il quinto non la possedeva. Euclide era a conoscenza di questa anomalia, tant'è che molti dei primi teoremi degli Elementi vengono dimostrati senza l'utilizzo del quinto postulato (che si sarebbe invece potuto utilizzare per ottenere delle dimostrazioni più semplici).

Vista la peculiarità del postulato, per svariati secoli si è cercato di dimostrare che il quinto postulato fosse dipendente dagli altri quattro. In realtà esso risulta indipendente, ovvero non è possibile dedurre il quinto postulato a partire dai primi quattro.

Poiché una teoria geometrica è costruita a partire dai suoi assiomi, sono nate, in epoche recenti, tutta una serie di teorie

Tutto ciò che si può dimostrare con un ragionamento logico a partire da enti primitivi e postulati viene chiamato **teorema**.

A partire quindi da enti primitivi e postulati possiamo via via dimostrare teoremi e aggiungere nuove definizioni: possiamo definire le semirette, i segmenti (data una retta orientata e due suoi punti A e B diciamo segmento AB l'insieme dei punti della retta formato da A, da B e dai punti compresi fra A e B), le poligonali (che possono essere chiuse, aperte, intrecciate), gli angoli (un angolo è ciascuna delle due parti di un piano individuate da due semirette aventi la stessa origine, incluse le due semirette) ...

5.2 Aree e perimetri di figure piane note

Particolarmente studiati in geometria sono i poligoni. Definiamo **poligonale** una figura costituita da un insieme ordinato di segmenti in cui ciascun segmento ha in comune un estremo con il segmento successivo. Una poligonale è *chiusa* se l'ultimo estremo coincide con il primo, in caso contrario è **aperta**. Una poligonale è **intrecciata** se almeno due suoi lati non consecutivi si intersecano.

Un **poligono** è una poligonale chiusa non intrecciata. Un poligono con tre lati si chiama *triangolo*, uno con quattro lati si chiama *quadrilatero*, uno con cinque lati si chiama *pentagono*, con sei lati si chiama *esagono* e così via.

Tra i poligoni distinguiamo i poligoni *concavi* e *convessi*. Un poligono è convesso se presi comunque due punti al suo interno, il segmento individuato dai due punti cade tutto all'interno del poligono. Un poligono si dice concavo se esistono due punti tali che il segmento da loro individuato non cada tutto all'interno del poligono.

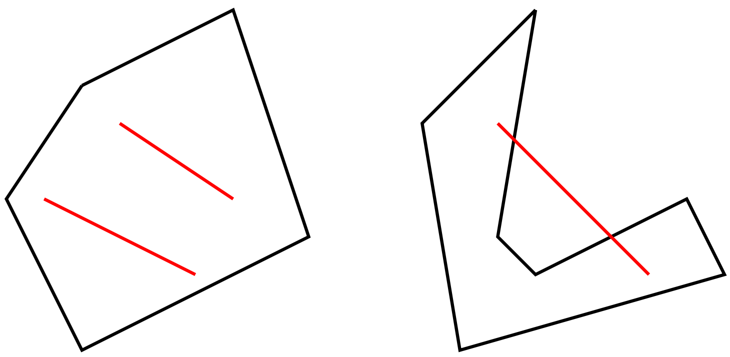


Figura 5.1: poligono convesso (a sinistra) e concavo (a destra).

Dei triangoli parleremo approfonditamente in 5.7. Per quanto riguarda i quadrilateri, se un quadrilatero ha due lati paralleli viene definito *trapezio*. Un *parallelogramma* è invece un quadrilatero con i lati opposti paralleli (ed è quindi un particolare tipo di trapezio). Tra questi vi sono i *rettangoli*, parallelogrammi aventi i quattro angoli congruenti. Un parallelogramma invece con i quattro lati congruenti vengono detti *rombi*. Un *quadrato* è invece un parallelogramma avente i quattro angoli e i quattro lati congruenti. Possiamo rappresentare la situazione con un diagramma di Eulero-Venn (si veda pag. 4).

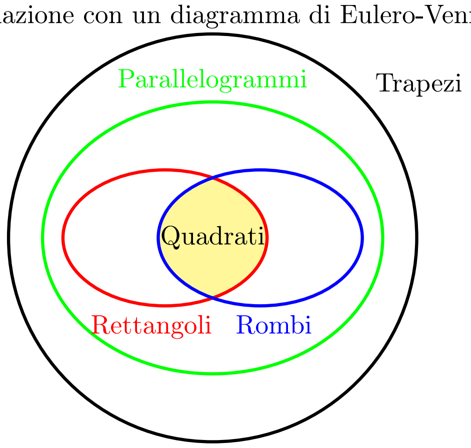
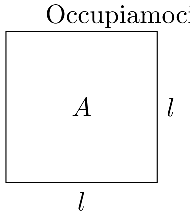


Figura 5.2: quadrilateri particolari.

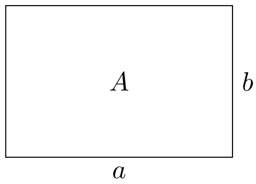
geometriche che negano il quinto postulato (e lo si può fare in vari modi: affermando che da un punto esterno ad una retta non è possibile tracciare una retta parallela ad una retta data o che da un punto esterno ad una retta è possibile tracciare più di una retta parallela ad una retta data) e che pertanto vengono chiamate geometrie non euclidee. Tali geometrie sono note con il nome di geometria ellittica e geometria iperbolica e se ne sono occupati illustri matematici del passato come Riemann e Lobačevskij.

Per chi volesse approfondire consiglio il bellissimo ma difficile libro di Evandro Agazzi "Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria".

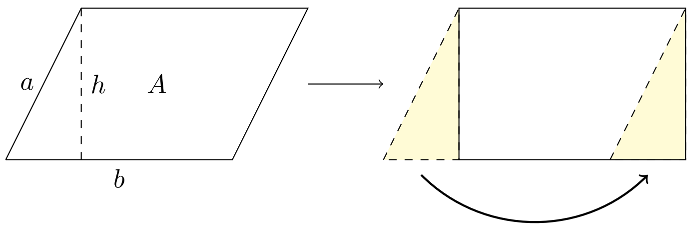
Occupiamoci ora di calcolare aree e perimetri[4] di poligoni noti.



Partiamo dal poligono più semplice, il quadrato. Il perimetro è la somma delle lunghezze dei lati quindi si ha $2p = 4l$ mentre l'area vale $A = l^2$.

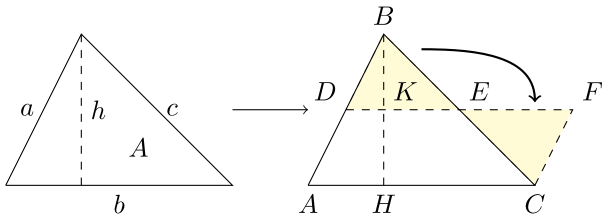


Per quanto riguarda il rettangolo, abbiamo che il perimetro è la somma dei lati e quindi $2p = 2a + 2b$ mentre l'area è uguale al prodotto dei lati: $A = a \cdot b$.



Per quanto riguarda il parallelogramma, abbiamo che il perimetro è la somma dei lati e quindi $2p = 2a + 2b$ mentre l'area risulta più complessa da calcolare. Se però immaginiamo di 'spostare' con un movimento rigido il triangolo colorato, allora otteniamo un rettangolo, di cui sappiamo calcolare l'area. Si ha pertanto $A = b \cdot h$.

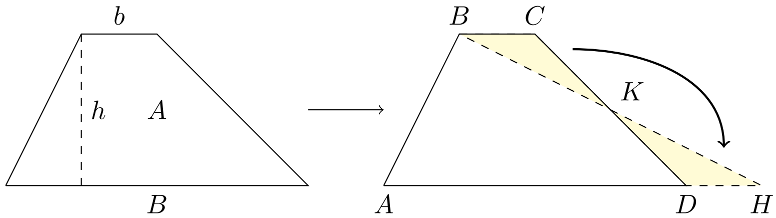
Faccio notare che in questo caso l'area non è data dal prodotto dei due lati ma dal prodotto della base per l'altezza. Dobbiamo pertanto conoscere l'altezza h del parallelogramma al fine di calcolare l'area.



Per quanto riguarda il triangolo, abbiamo che il perimetro è la somma dei lati e quindi $2p = a + b + c$ mentre l'area risulta più complessa da calcolare. Possiamo però utilizzare uno stratagemma simile a quello utilizzato per il parallelogramma e compiere uno spostamento rigido con un triangolo opportuno.

Si può dimostrare che i triangoli BDE e CEF sono congruenti. Se allora spostiamo con un movimento rigido il triangolo BDE e lo mettiamo al posto del triangolo CEF otteniamo un parallelogramma che ha per base la base del triangolo e per altezza la metà dell'altezza del triangolo (D, K, E tagliano a metà rispettivamente i lati AB, BH, BC). Conseguentemente l'area del triangolo vale

$$A = \frac{1}{2}\, b \cdot h.$$



Per quanto riguarda il trapezio, il perimetro si ottiene come somma della base maggiore e della base minore più i due lati obliqui. Per calcolare l'area dobbiamo ricorrere allo stesso stratagemma utilizzato per i triangoli.

Facciamo coincidere il triangolo BCK con il triangolo congruente DHK ottenendo un triangolo la cui base è la somma delle basi del trapezio e la cui altezza è pari all'altezza del trapezio. Otteniamo pertanto come area del trapezio la formula

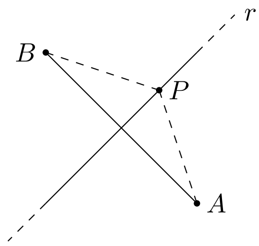
$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h.$$

Decisamente più complesso risulta il calcolo delle aree di figure curve. Ci basti sapere che la misura della circonferenza risulta essere pari a $\mathscr{C} = 2\pi r$ mentre l'area del cerchio è pari a $A = \pi r^2$.

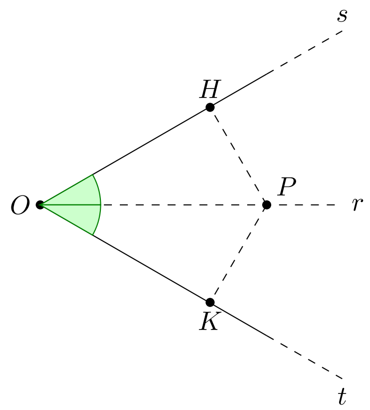
5.3 Luoghi geometrici

In geometria è particolarmente interessante il concetto di **luogo geometrico**: si dice luogo geometrico l'insieme di tutti e soli i punti del piano che soddisfano una certa proprietà, detta proprietà caratteristica del luogo.

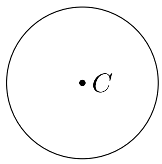
[4] Ricordo che il perimetro si indica con $2p$ e quindi p indica il semiperimetro. Indicheremo infine con A l'area di un poligono.



L'asse di un segmento (cioè la retta perpendicolare al segmento, passante per il suo punto medio) è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.



La bisettrice di un angolo (ovvero la semiretta uscente dal vertice dell'angolo e che divide in due l'angolo stesso) è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.



Una circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.

5.4 Teorema di Talete

Teorema 1 *Se un fascio di rette parallele è intersecato da due trasversali, i segmenti (compresi tra rette parallele) che si formano sulla prima trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti (compresi fra le stesse rette parallele) che si formano sulla seconda trasversale.*

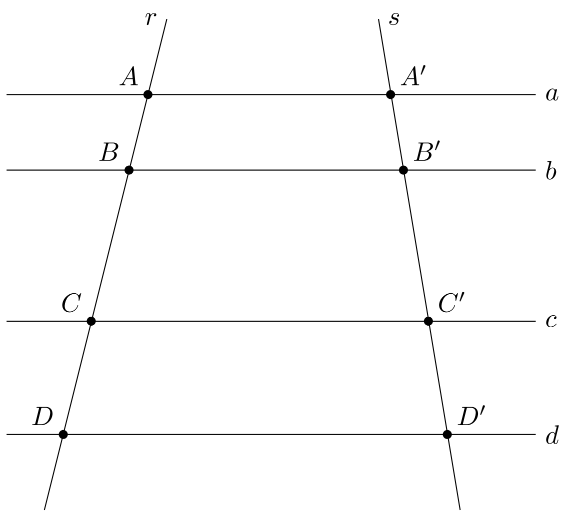


Figura 5.3: il teorema di Talete.

Il *teorema di Talete* afferma che se le rette $a \parallel b \parallel c \parallel d$[5] vengono tagliate da due trasversali r e s rispettivamente nei punti A, B, C, D e A', B', C', D' (questi ultimi detti i corrispondenti di A, B, C, D) allora i segmenti che si formano sulla prima trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti che si formano sulla seconda ovvero vale la proporzione

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

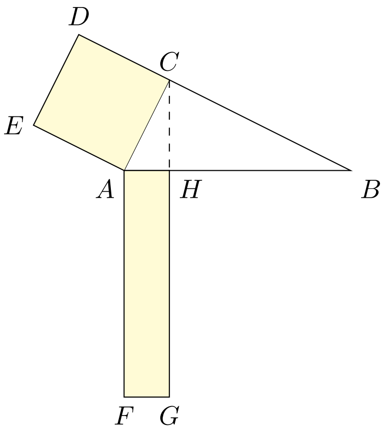
In particolare a segmenti congruenti sulla prima trasversale corrispondono segmenti congruenti sulla seconda.

[5] Ricordo che il simbolo $\parallel$ significa parallelo.

5.5 Teorema di Euclide

Enunciamo il *primo teorema di Euclide.*

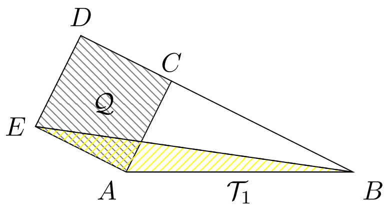
Teorema 2 *In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.*



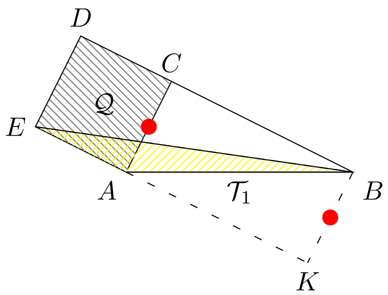
Nella figura, il quadrato costruito sul cateto AC è equivalente al rettangolo $AHGF$ dove AH corrisponde alla proiezione del cateto AC sull'ipotenusa AB e AF è congruente all'ipotenusa AB.

Figura 5.4: il primo teorema di Euclide.

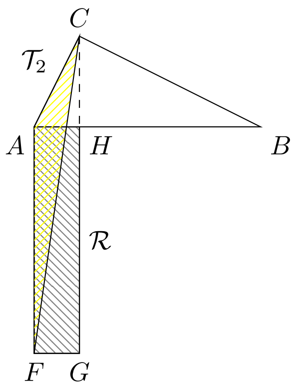
Il teorema è stato dimostrato da Euclide nei suoi *Elementi*. Illustriamo pertanto il modo in cui Euclide, negli *Elementi*, ha dimostrato il primo teorema.



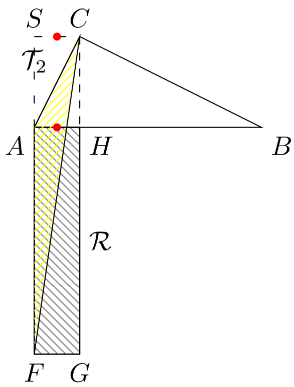
Dato il triangolo ABC rettangolo in C, costruiamo il quadrato $\mathcal{Q}$ sul cateto AC e congiungiamo E con B. Indichiamo con $\mathcal{T}_1$ il triangolo ABE.



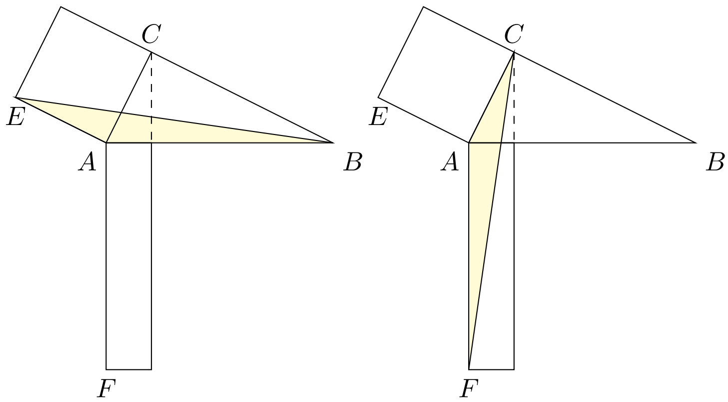
$\mathcal{Q}$ e $\mathcal{T}_1$ hanno la stessa base AE e altezze congruenti AC e BK pertanto, come diretta conseguenza di quanto esposto nel paragrafo 5.2, si ha $\mathcal{Q} \doteq 2\mathcal{T}_1$ ove il simbolo $\doteq$ indica l'equivalenza di aree.



Costruiamo il rettangolo $\mathcal{R}$ sul lato AH e congiungiamo C con F. Indichiamo con $\mathcal{T}_2$ il triangolo CAF.



$\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}_2$ hanno la stessa base AF e altezze AH e SC congruenti, quindi $\mathcal{R} \doteq 2\mathcal{T}_2$.



Si può mostrare che i due triangoli $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono congruenti, pertanto hanno la medesima area. Quindi $2\mathcal{T}_1 \doteq 2\mathcal{T}_2$. Pertanto $\mathcal{Q} \doteq \mathcal{R}$.

Enunciamo ora il *secondo teorema di Euclide.*

Teorema 3 *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

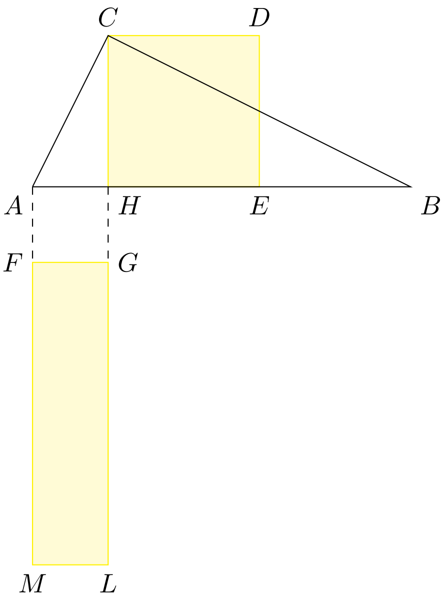


Figura 5.5: il secondo teorema di Euclide.

Nella figura, il quadrato costruito su CH, altezza relativa all'ipotenusa AB, è equivalente al rettangolo $FGLM$ ove FG è congruente ad AH (proiezione di AC sull'ipotenusa AB), GL è congruente a HB (proiezione di CB sull'ipotenusa AB) e HL è congruente all'ipotenusa AB.

5.6 Teorema di Pitagora

Teorema 4 *In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

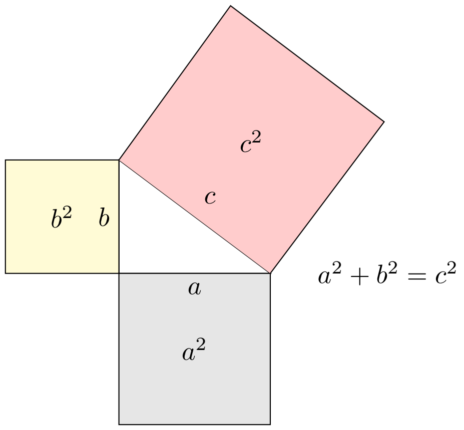
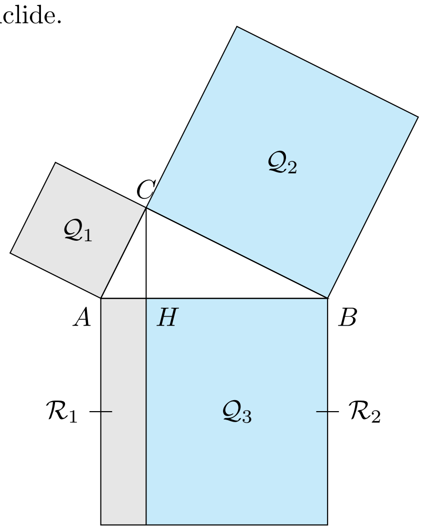


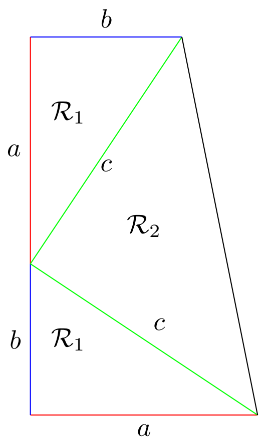
Figura 5.6: il teorema di Pitagora.

Esistono moltissime dimostrazioni del Teorema di Pitagora. A titolo di esempio ne vedremo alcune, molto diverse tra di loro. Un primo modo in cui possiamo dimostrare il teorema è attraverso l'utilizzo del Teorema di Euclide.



Per costruzione abbiamo $\mathcal{Q}_3 \doteq \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$. Applichiamo ora due volte il primo Teorema di Euclide: abbiamo $\mathcal{Q}_1 \doteq \mathcal{R}_1$ e $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{R}_2$. Pertanto $\mathcal{Q}_3 \doteq \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \doteq \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$.

Un'altra dimostrazione interessante è quella di James Garfield che in seguito divenne il ventesimo Presidente degli Stati Uniti d'America. La dimostrazione è interessante in quanto non compare in essa alcun quadrato.



Per costruzione i due triangoli $\mathcal{R}_1$ sono rettangoli e congruenti, mentre si può dimostrare che anche il triangolo $\mathcal{R}_2$ è rettangolo. Calcoliamo l'area del trapezio in due modi diversi, come visto in 5.2 e come somma delle aree dei triangoli che lo compongono. Abbiamo

$$\frac{(a+b)\,(a+b)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

da cui, svolgendo i calcoli,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Il teorema di Pitagora è uno dei teoremi di geometria più noti. Di esso vale anche il teorema inverso, ovvero un triangolo nel quale la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato è rettangolo.

Una *terna pitagorica* è una terna di numeri naturali a, b, c tali che $a^2 + b^2 = c^2$. Il nome deriva chiaramente dal teorema di Pitagora, da cui discende che ad ogni triangolo rettangolo con lati interi corrisponde una terna pitagorica, e viceversa.

Osserviamo che se $(a,\ b,\ c)$ è una terna pitagorica, allora lo è anche $(ka,\ kb,\ kc)$, dove k è un numero naturale qualsiasi cioè data una terna pitagorica, lo è anche un qualsiasi multiplo di quella terna. Una terna pitagorica si dice *primitiva* se $a,\ b,\ c$ non hanno divisori comuni (ovvero un numero che divida sia a, b e c).

Esiste una formula (che riportiamo per curiosità) che consente di determinare tutte le terne pitagoriche:

$$a = m^2 - n^2; \quad b = 2mn; \quad c = m^2 + n^2$$

dove n e m sono *coprimi* (ovvero non hanno divisori comuni) e uno è pari e l'altro dispari.

Ad esempio se $m = 2$ e $n = 1$ allora $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$. Se $m = 3$ e $n = 2$ allora $a = 5$, $b = 12$ e $c = 13$. In entrambi i casi si vede facilmente che $a^2 + b^2 = c^2$.

5.7 Classificazione dei triangoli

Un **triangolo** è un insieme di punti del piano costituito da una poligonale di tre lati e dai suoi punti interni. I punti estremi dei tre lati si chiamano **vertici** del triangolo. I triangoli possono essere classificati in base ai lati e agli angoli.

Se classifichiamo i triangoli in base agli angoli allora abbiamo:

1. triangoli *acutangoli* se tutti gli angoli sono acuti (ovvero minori di $90°$);
2. triangoli *rettangoli* se un angolo è di $90°$;
3. triangoli *ottusangoli* se un angolo è maggiore di $90°$.

Poiché si può dimostrare che la somma interna degli angoli di un triangolo è $180°$, in un triangolo non vi possono essere più di un angolo retto o più di un angolo ottuso.

Se classifichiamo i triangoli in base ai lati allora abbiamo:

1. triangoli *scaleni* se tutti i lati hanno lunghezze diverse;
2. triangoli *isosceli* se due lati hanno la stessa lunghezza e il rimanente ha lunghezza diversa;
3. triangoli *equilateri* se hanno tutti i lati di ugual lunghezza.

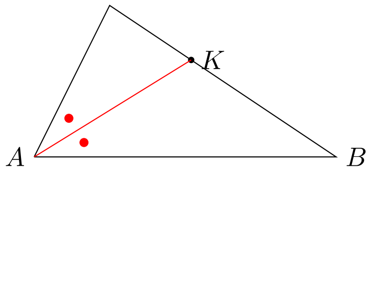
Facciamo alcune ulteriori osservazioni:

- un triangolo isoscele ha due lati congruenti e si può dimostrare che gli angoli alla base sono pure congruenti (si chiama base il terzo lato non congruente agli altri due);
- un triangolo equilatero è anche equiangolo, quindi ha tutti gli angoli congruenti (che misurano perciò $180°/3 = 60°$).

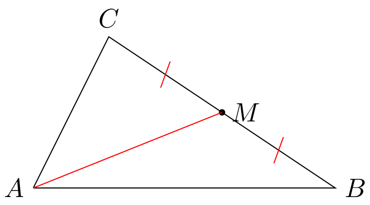
Fate attenzione che le due classificazioni non sono mutuamente esclusive: un triangolo scaleno può essere acutangolo, ottusangolo o retto, un triangolo isoscele può essere acutangolo, rettangolo, ottusangolo. Però un triangolo equilatero deve essere necessariamente acutangolo (ha infatti tutti gli angoli di $60°$). Notare che un triangolo rettangolo isoscele ha un angolo di $90°$ e i due rimanenti (dovendo essere uguali) devono misurare $45°$.

5.8 Punti notevoli di un triangolo

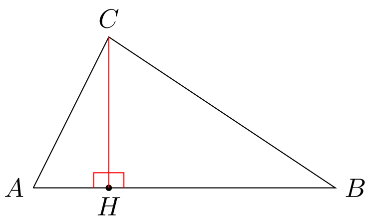
Diamo qui la definizione di alcuni segmenti e rette notevoli dei triangoli.



La **bisettrice** relativa al vertice A è il segmento di bisettrice dell'angolo in A che congiunge il vertice con il lato opposto.

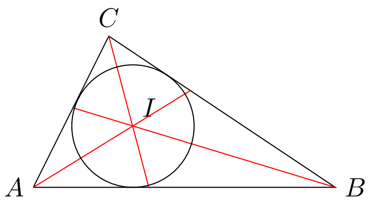


La **mediana** relativa ad un lato è il segmento che ha per estremi il punto medio del lato e il vertice opposto a quel lato.

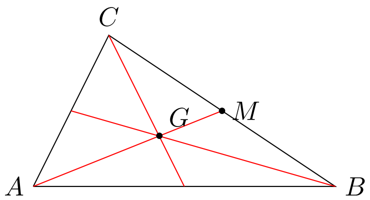


L'**altezza** relativa ad un lato è il segmento che, partendo dal vertice opposto al lato, incontra il lato stesso (o il suo prolungamento) formando con esso due angoli retti.

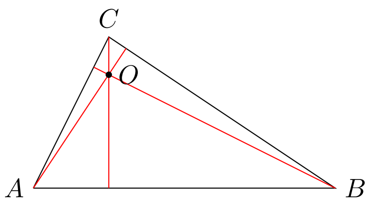
Chiaramente in un triangolo si hanno tre altezze, tre mediane e tre bisettrici (così come tre assi relativi ai lati). Poiché esistono tre bisettrici, tre mediane, tre assi, tre altezze, ci si può chiedere se queste passino tutte per uno stesso punto.



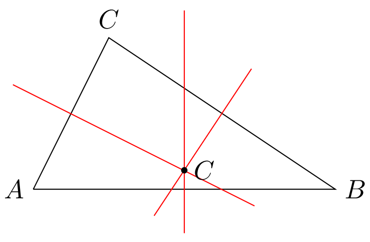
Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in un punto I detto *incentro*. L'incentro è il centro della circonferenza inscritta al triangolo.



Le mediane si incontrano in un punto G detto *baricentro*. Il baricentro ha la proprietà di dividere ciascuna mediana in due parti di cui l'una (AG) è doppia dell'altra (GM). Il baricentro ha una interessante proprietà fisica: se pensiamo di ritagliare il nostro triangolo su un pezzettino di compensato e lo appendiamo ad un filo passante per il suo baricentro, il triangolo rimane in equilibrio e parallelo al terreno.



Le altezze di un triangolo si incontrano in un punto H detto *ortocentro*.



Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in un punto C detto *circocentro*. Il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta.

Notiamo che mentre baricentro e incentro devono sempre cadere all'interno del triangolo, il circocentro e l'ortocentro possono cadere esternamente al triangolo.

Terminiamo il paragrafo con alcuni casi particolari. Un triangolo rettangolo è sempre inscrivibile in una semicirconferenza e il suo circocentro cade nel punto medio dell'ipotenusa.

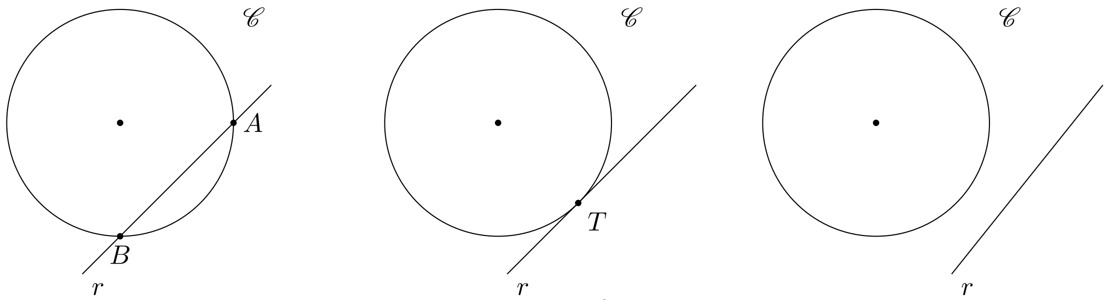
In un triangolo isoscele altezza, mediana, bisettrice e asse relativi alla base (cioè al lato non necessariamente congruente agli altri due lati) coincidono. Pertanto baricentro, ortocentro, incentro e circocentro risultano essere allineati.

In un triangolo equilatero, di conseguenza, coincidono l'altezza, la mediana, la bisettrice e l'asse relativi a tutti i lati. Quindi nel triangolo equilatero coincidono pure il baricentro, l'ortocentro, l'incentro e il circocentro. In particolare la circonferenza inscritta e la circonferenza circoscritta risultano concentriche.

5.9 Tangenti ad una circonferenza

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza costante da un punto fisso detto centro.

Una retta ed una circonferenza in un piano assumono tre posizioni reciproche: esse posso essere *secanti* (quando cioè hanno due punti in comune, ovvero si intersecano in due punti), possono essere *esterne* (quando retta e circonferenza non si intersecano ovvero non hanno punti in comune) o possono essere *tangenti* (quando retta e circonferenza hanno un solo punto in comune). Si può dimostrare che retta e circonferenza non possono avere più di due punti in comune.



Retta secante la circonferenza $r \cap \mathscr{C} = \{A,\ B\}$

Retta tangente la circonferenza $r \cap \mathscr{C} = \{T\}$

Retta esterna la circonferenza $r \cap \mathscr{C} = \emptyset$

Figura 5.7

Se una retta e una circonferenza sono tangenti, il punto in comune è detto *punto di tangenza*.

5.10 Proprietà delle rette tangenti ad una circonferenza

Esistono alcune proprietà interessanti sulle tangenti alla circonferenza condotte da un punto esterno. Proviamo a vedere quali sono.

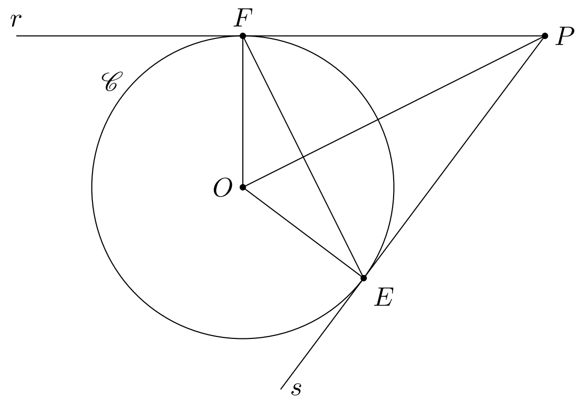


Figura 5.8

Le rette r ed s sono tangenti alla circonferenza $\mathscr{C}$. La misura dei segmenti OF e OE, dove F e E sono i punti di tangenza, è pari alla misura del raggio della circonferenza.

Inoltre la retta tangente r (così come la retta s) risulta perpendicolare al raggio OF (e, rispettivamente, a OE).

Esiste un interessante teorema sulle rette tangenti condotti da un punto esterno:

Teorema 5 *Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono le due rette tangenti a essa, allora i segmenti di tangenza PE e PF, aventi ciascuno un estremo nel punto P e l'altro in un punto di contatto, sono congruenti.*

Inoltre

1. OP è bisettrice dell'angolo FPE;
2. OP è bisettrice dell'angolo FOE;
3. EF è perpendicolare a OP.

5.11 Test

1. La retta è
   a) un assioma.
   b) un ente primitivo.
   c) un teorema.
   d) un ente geometrico definibile a partire da altri enti.
2. Un postulato
   a) caratterizza gli enti primitivi.
   b) è un teorema dimostrabile a partire da proposizioni più semplici.
   c) è un ente geometrico che accettiamo a priori.
   d) è una proposizione che costruiamo a partire dagli assiomi.
3. Un teorema
   a) è un assioma.
   b) è una proposizione che si può dimostrare a partire da enti primitivi e postulati.
   c) è una definizione.
   d) viene accettato a priori.
4. Un poligono
   a) può essere una poligonale aperta.
   b) deve essere concavo.
   c) è una poligonale chiusa non intrecciata.
   d) può essere una poligonale intrecciata.
5. Un poligono è concavo se
   a) esistono due punti tali che il segmento da loro individuato non cade tutto all'interno del poligono.
   b) per ogni coppia di punti presi a piacere il segmento da loro individuato non cade tutto all'interno del poligono.
   c) per ogni coppia di punti presi a piacere il segmento da loro individuato cade tutto all'interno del poligono.
   d) è non intrecciato.
6. Un parallelogramma con i quattro lati congruenti è
   a) un rombo.
   b) un quadrato.
   c) un trapezio.
   d) un rettangolo.
7. L'area di un parallelogramma si calcola moltiplicando
   a) la base per l'altezza.
   b) la base per la metà dell'altezza.
   c) la base per il doppio dell'altezza.
   d) nessuna delle precedenti risposte.
8. L'area di un triangolo si calcola moltiplicando
   a) la base per l'altezza.
   b) la base per la metà dell'altezza.
   c) la base per il doppio dell'altezza.
   d) nessuna delle precedenti risposte.

9. Il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi di un segmento si chiama
    a) bisettrice di un angolo.
    b) asse di un segmento.
    c) circonferenza.
    d) nessuna delle precedenti.
10. Quali dei seguenti teoremi riguarda rette parallele tagliate da una trasversale?
    a) Il primo teorema di Euclide.
    b) Il secondo teorema di Euclide.
    c) Il teorema di Pitagora.
    d) Il teorema di Talete.
11. Quali dei seguenti teoremi non si riferisce ai triangoli rettangoli?
    a) Il primo teorema di Euclide.
    b) Il secondo teorema di Euclide.
    c) Il teorema di Pitagora.
    d) Il teorema di Talete.
12. Quale fra queste è una terna pitagorica?
    a) 4, 5, 6.
    b) 6, 8, 9.
    c) 5, 12, 13.
    d) nessuna delle precedenti risposte.
13. L'inverso del teorema di Pitagora afferma che
    a) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
    b) in un triangolo nel quale la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato è rettangolo.
    c) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.
    d) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
14. Quali dei seguenti teoremi riguarda l'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo?
    a) Il primo teorema di Euclide.
    b) Il secondo teorema di Euclide.
    c) Il teorema di Pitagora.
    d) Il teorema di Talete.
15. Il primo teorema di Euclide afferma che
    a) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
    b) in un triangolo nel quale la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato è rettangolo.
    c) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.
    d) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
16. Il secondo teorema di Euclide afferma che

a) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
b) in un triangolo nel quale la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato è rettangolo.
c) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.
d) in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

17. Un triangolo isoscele

a) deve essere acutangolo.
b) può essere ottusangolo.
c) deve essere ottusangolo.
d) è scaleno.

18. Un triangolo rettangolo con un angolo di 45°

a) è isoscele
b) può essere isoscele.
c) può essere scaleno.
d) non ci sono elementi sufficienti per determinare il terzo angolo.

19. Per un punto appartenente alla circonferenza è possibile condurre da essa

a) sempre due tangenti.
b) sempre una sola tangente.
c) a volte una e a volte due tangenti.
d) a volte una e a volte nessuna tangente.

20. Una retta ed una circonferenza

a) devono essere secanti.
b) possono avere due punti in comune.
c) si intersecano sempre in un solo punto.
d) possono avere più di due punti in comune.

21. I segmenti di tangenza condotti da un punto esterno ad una circonferenza

a) hanno distanza diverse dal centro della circonferenza.
b) hanno misure diverse.
c) sono tra loro perpendicolari.
d) sono congruenti.

22. In quale triangolo il baricentro cade internamente?

a) Solo nel triangolo equilatero.
b) Solo nel triangolo rettangolo.
c) Solo nel triangolo isoscele.
d) In tutti i triangoli.

23. La circonferenza inscritta in un triangolo:

a) è tangente a tutti i lati.
b) passa per tutti i vertici.
c) risulta secante a tutti i lati.
d) nessuna delle precedenti.

Soluzioni: 1-B, 2-A, 3-B, 4-C, 5-A, 6-A, 7-A, 8-B, 9-B, 10-D, 11-D, 12-C, 13-B, 14-B, 15-C, 16-D, 17-B, 18-A, 19-B, 20-B, 21-D, 22-D, 23-A.

Capitolo 6

Potenze

6.1 Proprietà delle potenze

Introduciamo in questo paragrafo il concetto di potenza e le sue proprietà.

Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Definiamo a^n come il prodotto di a per se stesso n volte ovvero

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-volte}$$

quindi, ad esempio, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$. Si pone $a^1 = a$.

Potremmo voler estendere la definizione anche nel caso in cui l'esponente sia negativo. In questo caso allora dobbiamo imporre un'ulteriore condizione su a: $a \neq 0$ e lo dobbiamo fare per un motivo che sarà chiaro a breve. Sotto questa nuova ipotesi possiamo introdurre un esponente negativo e dare la seguente definizione: se $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ si pone

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

É chiaro a questo punto perché si pone $a \neq 0$: dobbiamo infatti ricordarci che in matematica non è ammessa la divisione per zero. Poniamo inoltre $a^0 = 1$. Altri esempi sono $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$.

Possiamo ulteriormente estendere la nostra definizione anche a esponeni razionali. Dobbiamo però operare ancora una volta una restrizione ad a: dobbiamo infatti ricordare che non esistono, ad esempio, le radici di numeri negativi come $\sqrt{-2}$. Pertanto nella seguente definizione dobbiamo imporre $a > 0$.

Poniamo

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ m,\ n \in \mathbb{N}$$

Ad esempio $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$, $7^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{7^4}$ e così via[1].

Il prossimo passaggio sarebbe quello di definire la potenza ad esponente reale. Non possiamo addentrarci qui nella teoria che servirebbe a definire numeri come $3^{\sqrt{2}}$, 5^{π} .... Ci basta sapere che anche in questo caso sono ben definiti tutti i numeri del tipo a^{α} con $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ricapitoliamo[2]:

$$a^0 = 1,\ \forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

$$a^1 = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-volte},\ \forall a \in \mathbb{R}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ \forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ \forall a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ m,\ n \in \mathbb{N}$$

$$a^{\alpha} \text{ è ben definito per ogni } a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo elencando le principali proprietà delle potenze:

[1]Vi è un altro importante motivo per cui $a > 0$. Oltre al già citato caso di non poter definire $(-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$, ammettere una base negativa porterebbe a dover gestire casi ambigui come il seguente. Notiamo che $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Allora $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ e $(-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Quindi si otterrebbero due risultati diversi pur avendo calcolato due potenze con la stessa base e lo stesso esponente. Attenzione però: spesso si utilizzano scritture come $(-8)^{\frac{1}{3}}$ per indicare $\sqrt[3]{-8}$. Quando si utilizza tale scrittura non si possono utilizzare le proprietà delle potenze che vedremo nel prossimo paragrafo.

[2]Ricordo che il simbolo $\forall$ significa 'per tutti/per ogni'.

1. *prodotto di potenze con stessa base*: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. *quoziente di potenze con stessa base*: $a^m : a^n = a^{m-n}$;
3. *potenza di potenza*: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
4. *prodotto di potenze di ugual esponente*: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$;
5. *quoziente di potenze di ugual esponente*: $a^n : b^n = (a : b)^n$

che, volendo, si possono anche enunciare nel seguente modo:

1. il prodotto di due potenze di ugual base e di diverso esponente è uguale ad una potenza che per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti;
2. il quoziente di due potenze con ugual base e di diverso esponente è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti;
3. la potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti;
4. il prodotto di due potenze di ugual esponente è uguale ad una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente;
5. il quoziente di due potenze di ugual esponente è uguale ad una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

6.2 La funzione esponenziale e le sue proprietà

Introduciamo in questo paragrafo una importante funzione trascendente[3], la *funzione esponenziale*. La funzione esponenziale, così come quella logaritmica che introdurremo nel prossimo paragrafo, sono particolarmente importanti in quanto descrivono molto bene numerosi fenomeni naturali, come il decadimento radioattivo, la carica e la scarica di condensatori, la pressione atmosferica, fenomeni chimici, biologici, fisici.

Come abbiano avuto modo di osservare nel paragrafo precedente, se $a > 0$, possiamo definire per ogni reale x il numero a^x. Pertanto possiamo definire una funzione[4]

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

Notiamo che nel caso particolare $a = 1$ si ha sempre $a^x = 1^x = 1$, pertanto il caso è privo di interesse e lo escluderemo. Quindi, per $a > 0, a \neq 1$ possiamo definire una funzione $y = a^x$ che chiameremo **funzione esponenziale** di base a.

Passiamo ora a disegnare il grafico della funzione esponenziale. Consideriamo, come base, il **numero di Nepero** e il cui valore[5] è circa $2,71828$. Per disegnare il grafico, possiamo calcolare i valori della funzione assunti per alcuni valori della variabile indipendente x e riportare i valori dell'ascissa e dell'ordinata in un piano cartesiano. Così facendo, otteniamo il grafico della figura 6.1.

[3]Una funzione si dice *algebrica* se in essa compaiono solo operazioni come la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente, l'elevamento a potenza o l'estrazione di radici. Le altre funzioni vengono dette *trascendenti*.

[4]$\mathbb{R}^+$ indica l'insieme dei numeri reali positivi.

[5]Non possiamo in questa sede entrare in dettaglio su come sia possibile ottenere il numero di Nepero e. Vista tuttavia l'importanza che tale numero ricopre in matematica, daremo qui solo dei piccoli accenni. Si consideri, $\forall n \in \mathbb{N}$ la seguente successione di numeri

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Quindi, se $n = 1$ allora $a_1 = 2$, se $n = 2$ allora $a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, se $n = 3$ allora $a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{64}{27}\right)$ e così via. Si può dimostrare che la successione di numeri che si ottiene è strettamente crescente e limitata, quindi dovrà 'tendere' ad un determinato valore finito che è stato indicato con la lettera e. Tale valore è circa $e = 2,71828\ldots$.

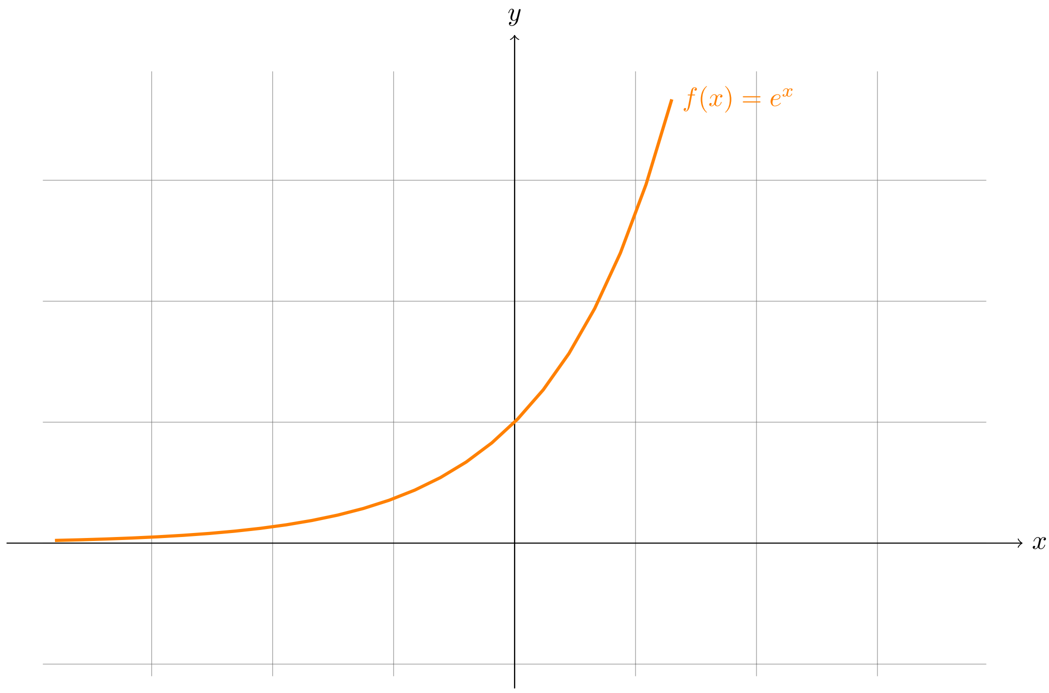


Figura 6.1

Il grafico è caratteristico di tutte le funzioni esponenziali con base $a > 1$. Vediamo quali sono le principali caratteristiche delle funzioni esponenziali con base $a > 1$:

- il dominio della funzione è $\mathbb{R}$;
- i valori assunti dalla funzione esponenziale sono sempre positivi, quindi l'insieme delle immagini è $\mathbb{R}^+$;
- il grafico passa per il punto $(0; 1)$;
- al crescere dei valori della variabile x crescono anche i valori della variabile dipendente y, quindi diremo che la funzione è *crescente*.

Proviamo ora a disegnare il grafico della funzione esponenziale quando la base è minore di 1, quindi con $0 < a < 1$. Nel nostro caso, a titolo esemplificativo, abbiamo preso $a = \frac{1}{e}$. Per disegnare il grafico, possiamo calcolare i valori della funzione assunti per alcuni valori della variabile indipendente x e riportare i valori dell'ascissa e dell'ordinata in un piano cartesiano. Così facendo, otteniamo il grafico della figura 6.2.

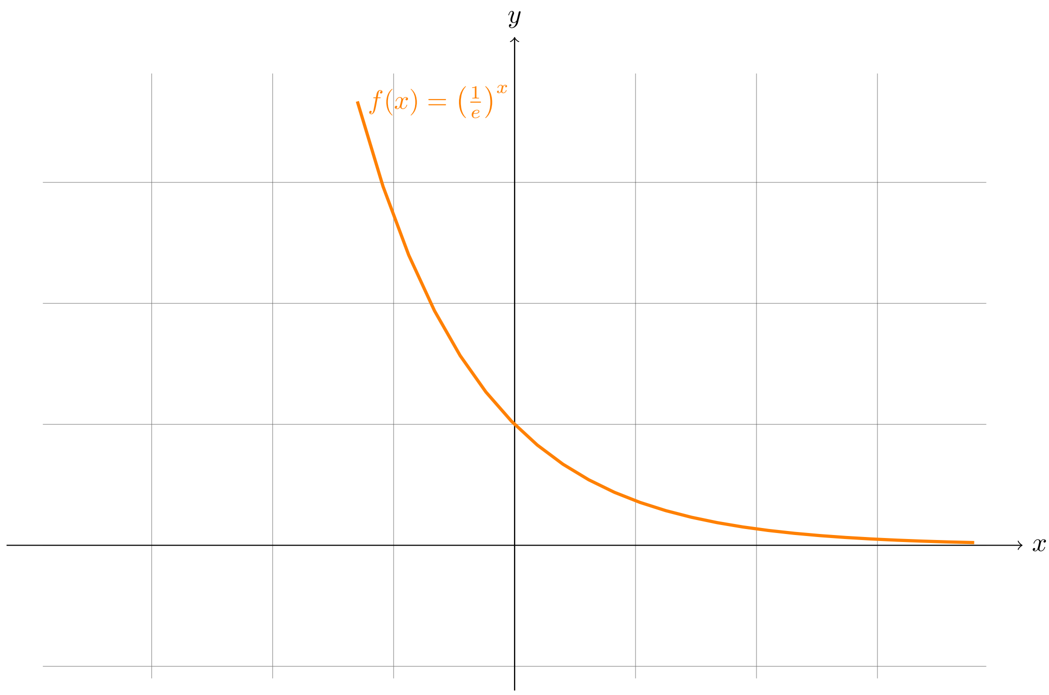


Figura 6.2

Il grafico è caratteristico di tutte le funzioni esponenziali con base $0 < a < 1$. Vediamo quali sono le principali caratteristiche delle funzioni esponenziali con base $0 < a < 1$:

- il dominio della funzione è $\mathbb{R}$;
- i valori assunti dalla funzione esponenziale sono sempre positivi, quindi l'insieme delle immagini è $\mathbb{R}^+$;
- il grafico passa per il punto $(0; 1)$;
- al crescere dei valori della variabile x diminuiscono i valori della variabile dipendente y, quindi diremo che la funzione è *decrescente*.

6.3 La funzione logaritmica

Diamo ora la definizione di logaritmo: il **logaritmo** in base a del numero b è l'esponente da attribuire alla base a per ottenere una potenza uguale a b, in simboli:

$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b.$$

Quali sono le condizioni di esistenza del logaritmo? Osserviamo che a^c è un esponenziale e che come tutti gli esponenziali, la base deve essere maggiore di zero e diversa da 1 pertanto $a > 0,\ a \neq 1$. Inoltre l'esponenziale è sempre un numero positivo, pertanto deve essere $b > 0$.

Osserviamo quanto segue:

- a prende il nome di *base del logaritmo*;
- b si chiama *argomento del logaritmo*;
- la base del logaritmo deve essere positiva e diversa da uno;
- l'argomento di un logaritmo deve essere un numero maggiore di zero;
- non esiste il logaritmo di un numero negativo o nullo.

Ad esempio, $\log_2 16 = 4$ perché $2^4 = 16$.

In matematica le basi più usate sono il numero 10 e il numero di *Nepero* e il cui valore è $2,71828\ldots$ (e è un numero irrazionale e quindi ha infinite cifre decimali).

1. I **logaritmi decimali** o di **Briggs** hanno per base il numero 10 e solitamente vengono indicati con log ovvero $\log_{10} = \log$.
2. I **logaritmi naturali** o **Neperiani** hanno per base il numero e e solitamente vengono indicati con il simbolo ln ovvero $\log_e = \ln$.

Terminiamo il paragrafo definendo la **funzione logaritmica**. La funzione esponenziale è, per $0 < a < 1$ decrescente, mentre per $a > 1$ è crescente. Tali funzioni sono, come si può dedurre dal relativo grafico, biettive e pertanto risultano invertibili. Chiamiamo l'inversa della funzione esponenziale *funzione logaritmica*. Possiamo pertanto definire una funzione:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log_a x \end{array}$$

chiamata funzione logaritmica di base a.

La funzione logaritmica di base a è l'inversa della funzione esponenziale di base a. Questo significa che se applichiamo a un qualunque numero reale x la funzione esponenziale di base a e, successivamente, al numero positivo $y = a^x$ applichiamo la funzione logaritmica di ugual base, otteniamo nuovamente il numero reale x da cui eravamo partiti. Analogamente, si ha che la funzione esponenziale di base a è l'inversa della funzione logaritmica di base a. Se applichiamo prima il logaritmo, dobbiamo però tenere conto che esso è definito solo per numeri reali positivi. In formule:

$$x \xrightarrow{\text{esponenziale di base a}} a^x \xrightarrow{\text{logaritmo di base a}} \log_a a^x = x$$

$$x > 0 \xrightarrow{\text{logaritmo di base a}} \log_a x \xrightarrow{\text{esponenziale di base a}} a^{\log_a x} = x$$

Con un procedimento analogo a quello seguito per costruire il grafico della funzione esponenziale, possiamo costruire i grafici delle funzioni logaritmiche nei due casi $a > 1$ (figura 6.3) e $0 < a < 1$ (figura 6.4). Nel nostro caso abbiamo preso come basi $a = e$ nel primo caso e $a = \frac{1}{e}$ nel secondo caso.

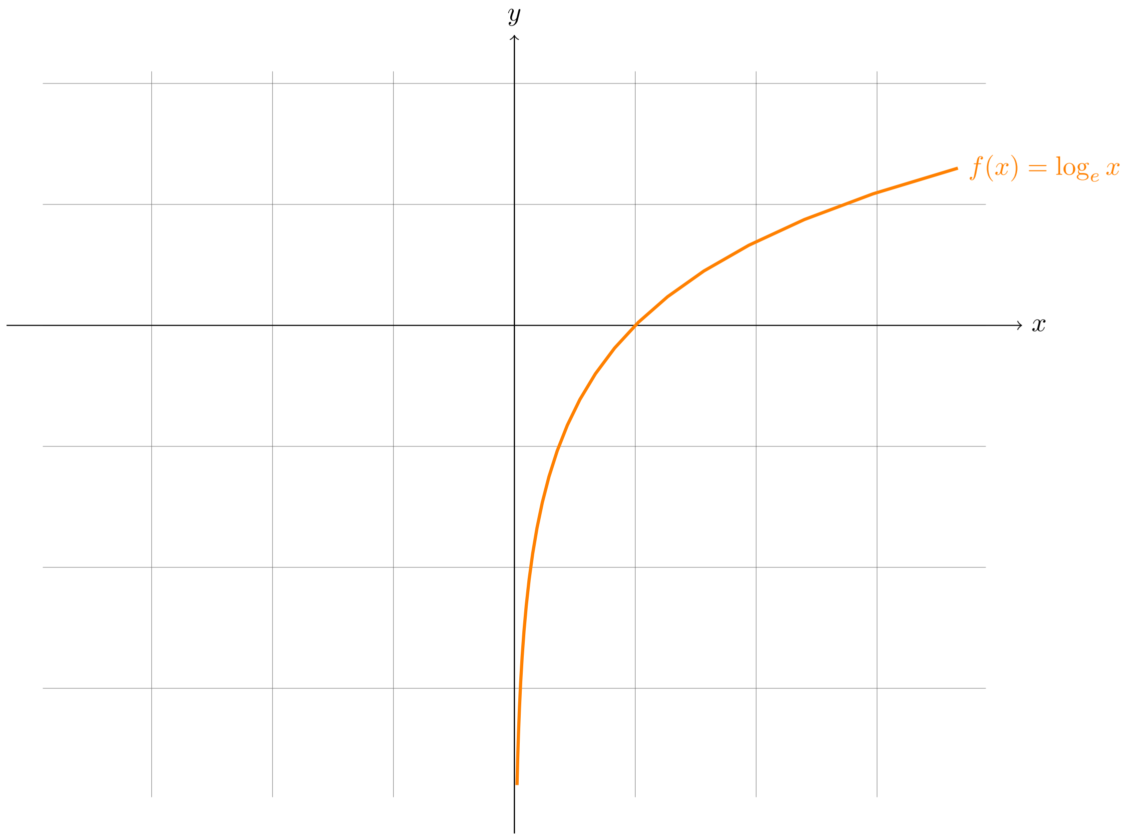


Figura 6.3

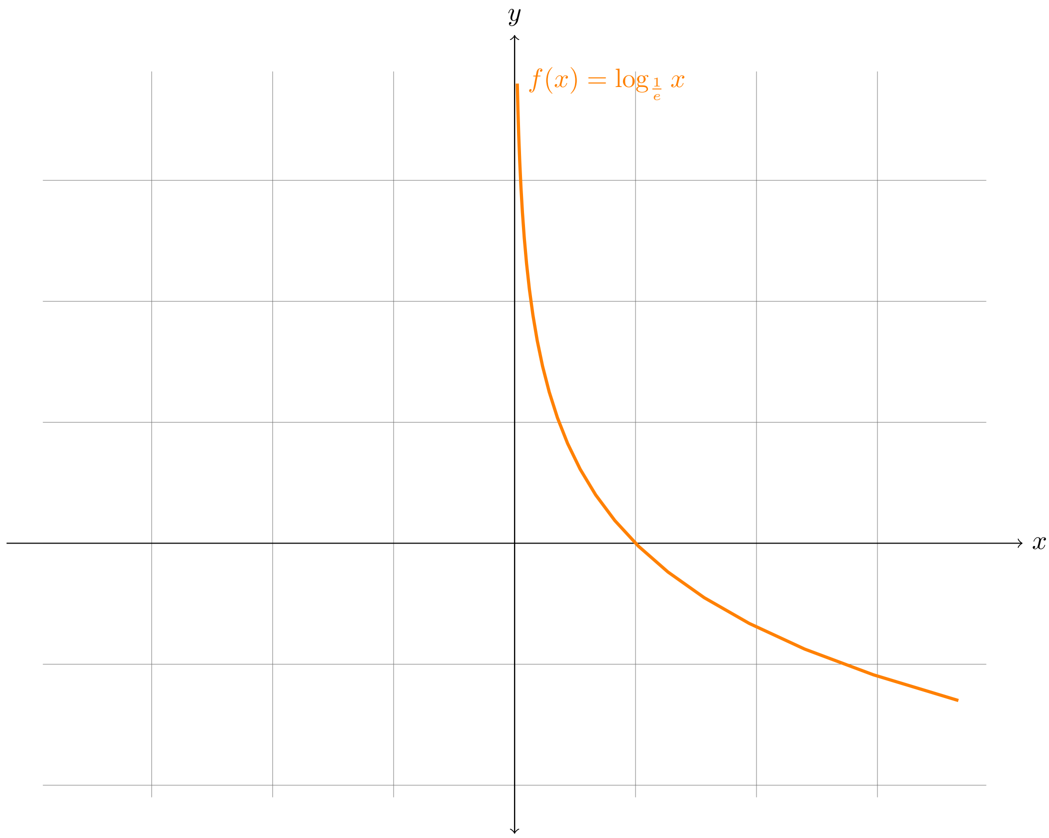


Figura 6.4

Poiché la funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale, il suo grafico si otterrà attraverso una simmetria rispetto alla bisettrice del primo-terzo quadrante, cioè una simmetria rispetto alla retta $y = x$. Tale simmetria opera una sostituzione delle variabili: $x \to y \ \wedge y \to x$. Infatti, se $y = a^x$, allora, dalla definizione si ottiene $\log_a y = x$. Da qui, sostituendo la x con la y otteniamo $\log_a x = y$ ovvero la funzione logaritmica.

Riassumiamo infine alcune proprietà della funzione logaritmica, che si possono dedurre dai corrispondenti grafici della funzione esponenziale. La funzione logaritmica $y = \log_a x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ gode delle seguenti proprietà:

- il dominio è $\mathbb{R}^+$;
- il codominio è $\mathbb{R}$;
- il suo grafico interseca l'asse x nel punto $(1; 0)$;
- la funzione logaritmica di base $a > 1$ è crescente;
- la funzione logaritmica di base $0 < a < 1$ è decrescente;
- il logaritmo di un numero risulta positivo, se la base ed il numero sono entrambi maggiori di uno o entrambi compresi tra zero ed uno;
- il logaritmo di un numero risulta negativo, se la base è maggiore di uno ed il numero compreso tra zero ed uno, oppure viceversa.

6.4 Proprietà dei logaritmi

Elenchiamo, senza dimostrarle, le proprietà dei logaritmi. Facciamo notare che

- $\log_a 1 = 0$: infatti $a^0 = 1$;
- $\log_a a = 1$: infatti $a^1 = a$;
- $\log_a a^c = c$: infatti c è l'esponente da attribuire alla base a per ottenere a^c;
- $a^{\log_a b} = b$: infatti per definizione $\log_a b$ è l'esponente da dare alla base a per ottenere b.

Inoltre valgono le seguenti:

1. **Logaritmo del prodotto**: la somma di due logaritmi con stessa base è uguale ad un logaritmo che ha per base la stessa base e per argomento il prodotto degli argomenti, in formule
$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c), \qquad \text{con } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0.$$
2. **Logaritmo di un quoziente**: la differenza di due logaritmi con stessa base è uguale ad un logaritmo che ha per base la stessa base e per argomento il quoziente degli argomenti, in formule
$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right), \qquad \text{con } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0.$$
3. **Logaritmo di una potenza**: il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo del numero, in formule
$$\log_a b^c = c \log_a b \qquad \text{con } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \in \mathbb{R}.$$
4. **Formula del cambiamento di base**: la formula del cambiamento di base consente di esprimere il logaritmo, dato in una determinata base a, di un numero b, in funzione dei logaritmi di una nuova base c del numero b e della vecchia base a, in formule
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{con } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1.$$
In particolare, se poniamo $b = c$ otteniamo
$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$
dove abbiamo tenuto conto che $\log_b b = 1$.

Facciamo, per ciascuna formula, alcuni esempi.

1. $\log_5 3 + \log_5 9 = \log_5 27$, $\log_2 3 + \log_2 8 = \log_2 24$.
2. $\log_2 45 - \log_2 5 = \log_2 9$, $\log_3 10 - \log_3 2 = \log_3 5$.
3. $\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$; $4 \log_2 3 = \log_2 3^4 = \log_2 81$.
4. $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$, $\log 7 = \frac{\ln 7}{\ln 10}$, $\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}$.

6.5 Test

1. L'espressione a^α è ben definita purché:

   a) $a \in \mathbb{R}$
   b) $a > 0$
   c) $a \neq 0$
   d) $a \geq 0$

2. L'espressione $a^m \cdot a^n$ è uguale a:

   a) a^{m+n}
   b) a^{m-n}
   c) $a^{m \cdot n}$
   d) a^{m^n}

3. L'espressione $a^m : a^n$ è uguale a:

   a) il prodotto di potenze con ugual base.
   b) il quoziente di potenze con ugual base.
   c) potenza di potenza.
   d) il quoziente di potenze con ugual esponente.

4. L'espressione $a^{\frac{m}{n}}$ è uguale a:

   a) $\sqrt[n]{a^m}$
   b) $\sqrt[m]{a^n}$
   c) $\frac{a^m}{n}$
   d) $\left(\frac{a}{n}\right)^m$

5. L'espressione $\log_a x - \log_b y$ (con $x > 0$ e $y > 0$) equivale a

   a) $\log_a(x - y)$
   b) $\log_a(xy)$
   c) $x \log_a y$
   d) nessuna delle precedenti.

6. L'espressione $a^{-\sqrt{3}}$ ha senso solo se

   a) $a \neq 0$
   b) $a > 0$
   c) $a \in \mathbb{R}$
   d) non ha mai senso.

7. L'espressione $a^{-\frac{3}{2}}$ ha senso solo se

   a) $a \neq 1$
   b) $a > 0$
   c) $a \in \mathbb{R}$
   d) $a \neq 0$

8. L'espressione $\log_a x^y$ (con $x > 0$) equivale a

   a) $\log_a(x + y)$
   b) $\log_a(xy)$
   c) $x \log_a y$
   d) $y \log_a x$

9. Se $a^x = y$ si può dire che:

a) $x = \log_x a$
b) $x = \log_a y$
c) $y = \log_x a$
d) $y = \log_a x$

10. La funzione $y = \log_a x$, con base $a > 1$:
    a) è negativa se $x < 0$.
    b) è positiva se $x > 1$.
    c) è nulla se $x < 0$.
    d) è nulla se $x < 1$.

11. Il $\log_a b$ esiste purché:
    a) $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$
    b) $a > 0,\ a \neq 1$
    c) $b > 0$
    d) nessuna delle precedenti.

12. Il grafico della funzione logaritmica $y = \log_a x$ con $0 < a < 1$ è:
    a) decrescente.
    b) crescente.
    c) sempre negativo.
    d) passa per il punto $(0; 1)$.

13. Quanto vale il $\log_a a$?
    a) 1
    b) 0
    c) a
    d) -1

14. Il grafico della funzione esponenziale $y = a^x$ con $0 < a < 1$ è:
    a) decrescente.
    b) crescente.
    c) sempre negativo.
    d) passa per il punto $(1; 0)$.

15. L'espressione $\log_a x + \log_a y$ equivale a:
    a) $\log_a(x \cdot y)$
    b) $\log_a(x + y)$
    c) $\log_a x^y$
    d) $\log_a y^x$

16. Il grafico della funzione esponenziale $y = a^x$ con $a > 1$ è:
    a) decrescente.
    b) crescente.
    c) sempre negativo.
    d) passa per il punto $(1; 0)$.

Soluzioni: 1-B, 2-A, 3-B, 4-A, 5-D, 6-B, 7-B, 8-D, 9-B, 10-B, 11-A, 12-A, 13-A, 14-A, 15-A, 16-B.

Capitolo 7

Nozioni elementari di goniometria

7.1 Funzioni goniometriche

In questo paragrafo inizieremo lo studio della *goniometria*. La goniometria è quel ramo della matematica che si occupa dello studio degli angoli e delle funzioni che su di essi si possono costruire. Non si deve invece confondere la goniometria con la *trigonometria*, che è la goniometria applicata alla risoluzione dei triangoli.

Considereremo angoli α orientati in senso antiorario. In particolare, esistono tre distinti modi in cui si possono misurare gli angoli:

1. il sistema **sessagesimale**, in cui la circonferenza viene suddivisa in 360° (360 *gradi*), ciascun grado in 60 *primi* (simbolo ') e ciascun primo in 60 *secondi* (simbolo ");

2. il sistema **sessadecimale**, in cui i gradi ed i loro sottomultipli sono rappresentati con i consueti numeri decimali;

3. i **radianti**, in cui un radiante corrisponde all'angolo centrato nel centro di una circonferenza a cui corrisponde un arco di lunghezza uguale a quella del raggio.

In matematica solitamente si utilizzano i radianti[1]. Per iniziare lo studio della goniometria dobbiamo partire da una *circonferenza goniometrica*. Si definisce circonferenza goniometrica una circonferenza di centro l'origine e raggio unitario (pertanto ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$, si veda la successiva figura).

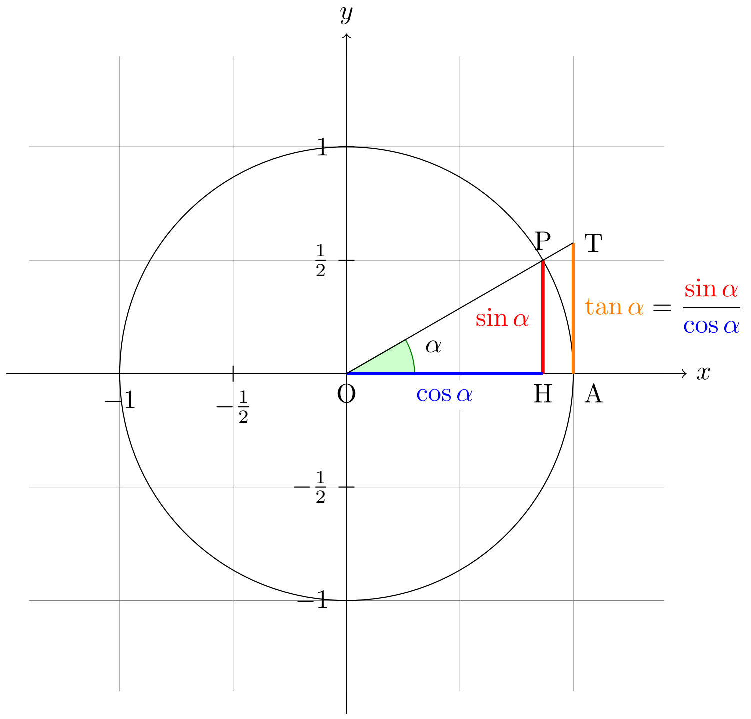


Figura 7.1

Sia P un punto appartenente alla circonferenza goniometrica. Indichiamo con α l'angolo $H\widehat{O}P$ ($\alpha = H\widehat{O}P$). Notiamo che la circonferenza ha raggio unitario, pertanto $OP = 1$. Indichiamo con

[1] Per motivi che qui non specificheremo.

$$\sin\alpha = \frac{PH}{OP} = PH \text{ (si legge } \textit{seno} \text{ di } \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = OH \text{ (si legge } \textit{coseno} \text{ di } \alpha)$$

In pratica, il seno ed il coseno di un angolo sono le coordinate del punto P appartenente alla circonferenza goniometrica. Pertanto possiamo dare le seguenti definizioni:

- si dice *seno* di un angolo orientato α, e si indica con $\sin\alpha$, l'ordinata del punto della circonferenza goniometrica associato ad α;
- si dice *coseno* di un angolo orientato α, e si indica con $\cos\alpha$, l'ascissa del punto della circonferenza goniometrica associato ad α.

Consideriamo poi la semiretta uscente da O e intersecante in T la retta passante per il punto $(1;0)$ e perpendicolare all'asse x. Chiamiamo

$$\tan\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{OP} = AT \text{ (si legge } \textit{tangente} \text{ di } \alpha).$$

Si dice pertanto tangente dell'angolo orientato α, e si indica con $\tan\alpha$, l'ordinata del punto in cui la tangente alla circonferenza goniometrica nel suo punto di ascissa 1 incontra la retta OP, essendo P il punto associato all'angolo α.

Preciso che la definizione data non dipende dalla scelta fatta di avere una circonferenza di raggio unitario, ovvero si può dimostrare[2] che la definizione data è indipendente dal raggio della circonferenza scelta.

Infine vediamo brevemente quale è il rapporto delle funzioni goniometriche date con i triangoli rettangoli. Si consideri, come in figura, il traingolo rettangolo ABC retto in A.

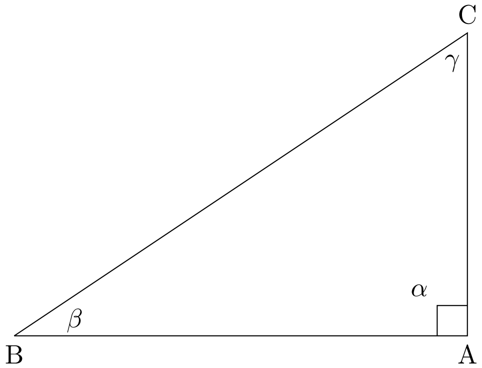


Figura 7.2

Si può dimostrare[3] che in ogni triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente e che in ogni triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto (o la cotangente dell'angolo adiacente[4]). In pratica:

$$AC = BC \cdot \sin\beta$$

$$AC = BC \cdot \cos\gamma$$

$$AB = BC \cdot \sin\gamma$$

$$AB = BC \cdot \cos\beta$$

$$AC = AB \cdot \tan\beta$$

$$AC = AB \cdot \cot\gamma$$

$$AB = AC \cdot \tan\gamma$$

$$AB = AC \cdot \cot\beta$$

Esistono delle generalizzazioni alle relazioni sopra riportate che sono applicabili a tutti i triangoli. Non affronteremo in questa sede i teoremi relativi ai triangoli qualunque.

[2] Ma noi non lo faremo.
[3] Omissis.
[4] Si definisce la *cotangente* di un angolo come il reciproco della tangente del medesimo angolo.

7.2 Principali relazioni goniometriche

Consideriamo nuovamente la figura di pagina 63. Il triangolo OPH è rettangolo pertanto possiamo applicare il teorema di Pitagora: $OH^2 + PH^2 = OP^2$. Ma per quanto visto nel paragrafo precedente, $OH = \cos\alpha$, $PH = \sin\alpha$ e $OP = 1$. Pertanto otteniamo la seguente importante relazione:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

che viene anche chiamata *prima relazione fondamentale della goniometria.*

Osserviamo ancora la figura di pagina 63. I triangoli POH e TOA sono simili, in quanto triangoli rettangoli con un angolo in comune. Esiste pertanto una relazione di proporzionalità tra i lati, in particolare

$$PH : OH = TA : OA.$$

Ma sappiamo che $TA = \tan\alpha$, $OA = 1$, $PH = \sin\alpha$, $OH = \cos\alpha$. Quindi otteniamo:

$$\sin\alpha : \cos\alpha = \tan\alpha : 1$$

ovvero

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Questa seconda relazione viene chiamata *seconda relazione fondamentale della goniometria.*

Esistono tutta una serie di formule che consentono di calcolare le funzioni goniometriche solo in termini di una funzione goniometrica data. Facciamo, a titolo di esempio, vedere solo le prime di queste.

Supponiamo di conoscere il seno di un angolo e vogliamo calcolare il coseno e la tangente del medesimo angolo. Utilizziamo la prima relazione fondamentale della goniometria: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Si ha:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Preciso che quel segno $\pm$ va correttamente interpretato: il coseno infatti non assume contemporaneamente valori positivi e negativi. Quel segno $\pm$ significa che di volta in volta dobbiamo scegliere (a seconda del quadrante in cui si trova l'angolo) se il coseno ha valore positivo o negativo. Sottolineiamo ancora una volta che queste formule derivano, di fatto, da una applicazione del teorema di Pitagora.

Per la tangente otteniamo

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$$

dove abbiamo utilizzato il risultato precedente.

Analogamente possiamo ottenere

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Concludiamo il nostro breve excursus sulle funzioni goniometriche facendo notare che quanto fatto non vale solo per angoli acuti. Esistono tutte una serie di formule per passare a particolari angoli *associati* ad un angolo acuto. Vediamone le principali.

Consideriamo due angoli *complementari* ovvero due angoli la cui somma dà 90°. Quindi, se α e β sono complementari, allora $\alpha + \beta = 90°$. Quindi $\beta = 90° - \alpha$. Si può dimostrare che

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$$

Consideriamo due angoli *supplementari* ovvero due angoli la cui somma dà 180°. Quindi, se α e β sono supplementari, allora $\alpha + \beta = 180°$. Quindi $\beta = 180° - \alpha$. Si può dimostrare che

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$$

Consideriamo due angoli *esplementari* ovvero due angoli la cui somma dà 360°. Quindi, se α e β sono esplementari, allora $\alpha + \beta = 360^\circ$. Quindi $\beta = 360^\circ - \alpha$. Si può dimostrare che

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(360^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$$

7.3 Test

1. In un triangolo rettangolo, il coseno di un angolo acuto è il rapporto tra
   a) il cateto opposto e l'ipotenusa.
   b) l'ipotenusa ed il cateto opposto.
   c) il cateto adiacente e l'ipotenusa.
   d) l'ipotenusa ed il cateto adiacente.

2. La tangente goniometrica di un angolo è
   a) il rapporto tra il suo coseno e il suo seno.
   b) il prodotto fra il suo seno ed il suo coseno.
   c) il rapporto fra il suo seno ed il suo coseno.
   d) il reciproco del suo coseno.

3. La prima relazione fondamentale della goniometria afferma che
   a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
   b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -1$
   c) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1 = 0$
   d) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

4. Il seno di un angolo orientato α
   a) corrisponde all'ordinata del punto della circonferenza goniometrica associato ad α.
   b) corrisponde all'ascissa del punto della circonferenza goniometrica associato ad α.
   c) corrisponde all'ordinata del punto della circonferenza associato ad α.
   d) corrisponde all'ascissa del punto della circonferenza associato ad α.

5. Noto il $\sin\alpha$ allora
   a) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$
   b) $\cos^2\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$
   c) $\cos\alpha = 1-\sin^2\alpha$
   d) $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

6. La cotangente goniometrica di un angolo è uguale
   a) all'opposto della tangente dell'angolo.
   b) al reciproco della tangente dell'angolo.
   c) al quoziente del seno e coseno di quell'angolo.
   d) al prodotto del seno e del coseno di quell'angolo.

7. La seconda relazione fondamentale della goniometria afferma che
   a) la tangente goniometrica di un angolo è uguale al prodotto del seno e del coseno di quell'angolo.
   b) la tangente goniometrica di un angolo è uguale al quoziente del seno e del coseno di quell'angolo.
   c) la tangente goniometrica di un angolo è uguale al quoziente del coseno e del seno di quell'angolo.
   d) la tangente goniometrica di un angolo è uguale alla somma del seno e del coseno di quell'angolo.

8. La tangente di un angolo
   a) può assumere qualsiasi valore.
   b) assume solo valori positivi.
   c) assume solo valori tra -1 e 1.
   d) assume solo un numero finito di valori.

9. Il radiante

a) corrisponde all'angolo centrato nel centro di una circonferenza a cui corrisponde un arco di lunghezza pari al raggio.
b) corrisponde all'angolo centrato nel centro di una circonferenza a cui corrisponde un arco di lunghezza pari a metà del raggio.
c) corrisponde all'ampiezza di un angolo pari a $90°$.
d) corrisponde all'ampiezza di un angolo pari a un grado.

10. In ogni triangolo rettangolo

a) un cateto è uguale all'ipotenusa per la tangente dell'angolo opposto.
b) un cateto è uguale all'ipotenusa per la cotangente dell'angolo opposto.
c) un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.
d) un cateto è uguale all'altro cateto per la cotangente dell'angolo opposto.

11. Il seno di un angolo

a) può assumere qualsiasi valore.
b) assume solo valori positivi.
c) assume solo valori tra -1 e 1.
d) assume solo un numero finito di valori.

12. In ogni triangolo rettangolo

a) un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo opposto.
b) un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto.
c) un cateto è uguale all'altro cateto per il coseno dell'angolo opposto.
d) un cateto è uguale all'altro cateto per il seno dell'angolo opposto.

13. La circonferenza goniometrica

a) è una circonferenza di raggio unitario.
b) è una circonferenza di raggio unitario e centrata nell'origine.
c) ha equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$.
d) nessuna delle precedenti.

Soluzioni: 1-C, 2-C, 3-A, 4-A, 5-D, 6-B, 7-B, 8-A, 9-A, 10-C, 11-C, 12-B, 13-B.

Indice